

Estabilidad global de una clase de modelos SCIR con portadores asintomáticos, incidencia no lineal y salida no lineal desde los portadores

PONENTE

Oscar Mauricio Mora Arroyo

COAUTOR

Miller Orlando Cerón Gómez

Universidad de Nariño

EVENTO

SOLABIMA 2026

7 de octubre de 2026



Universidad de **Nariño**
FUNDADA EN 1904



Tres líneas históricas que convergen en el modelo SCIR

De los fundamentos al modelo analizado

Estructura compartimental → mecanismos no lineales → portadores y umbral global.

Fundamentos compartimentales

1760–1927

1760/1766

Bernoulli

Primer modelo cuantitativo de inoculación.

1906

Hamer: ley de acción de masas

$$S \xrightarrow{\beta SI} I$$

Nuevos casos proporcionales al producto SI .

1927

Kermack–McKendrick: modelo SIR

$$S \xrightarrow{\beta SI} I \xrightarrow{\gamma I} R$$

Dinámica compartimental y umbral epidémico.

No linealidad y estabilidad

1978–2007

1978–1987

Capasso y colaboradores

$$\Lambda = \Phi(S, I) \neq \beta SI$$

Incidencia epidemiológica no bilineal.

2005–2007

Korobeinikov–Maini

$$\phi(z) = z - 1 - \ln z, \quad \dot{V} \leq 0$$

Funciones de Lyapunov para incidencia no lineal.

Portadores y modelo actual

2011–2026

2011–2016

Kalajdzievska–Li; Manyombe et al.

$$S \longrightarrow C \longrightarrow I \longrightarrow R$$

C e I transmiten; progresión lineal entre etapas.

2020

Cerón–Ibargüen–López

$$\Lambda = f(S)[g(C) + h(I)]$$

Modelo SCIR con incidencia no lineal.

2026 Esta ponencia

$$C \xrightarrow{\alpha \sigma(C)} I$$

Salida no lineal y umbral global completo.

El modelo SCIR combina portadores asintomáticos, incidencia y salida no lineales, y un umbral global.

Pregunta central y ruta de la ponencia

Pregunta central

¿Qué **condiciones estructurales** sobre f , g , h y σ permiten que $\mathcal{R}_0$, obtenido localmente, determine la **dinámica global** del modelo SCIR?

1. Modelo y mecanismos

Clases epidemiológicas,
incidencia

$$f(S) [g(C) + h(I)]$$

y salida portadora $\sigma(C)$.

2. Condiciones y umbral

→ Monotonía, coercividad y
condiciones de cociente;
después, $\mathcal{R}_0$, equilibrios y
reducción escalar.

3. Estabilidad global

→ Lyapunov–LaSalle: las hipótesis
funcionales controlan el signo de
 $\dot{L}$ y el conjunto de igualdad.

4. Aplicación y cierre

→ A un mismo $\mathcal{R}_0$, comparar cómo
la forma no lineal modifica la
carga endémica y el transitorio.

Idea que organiza la ponencia

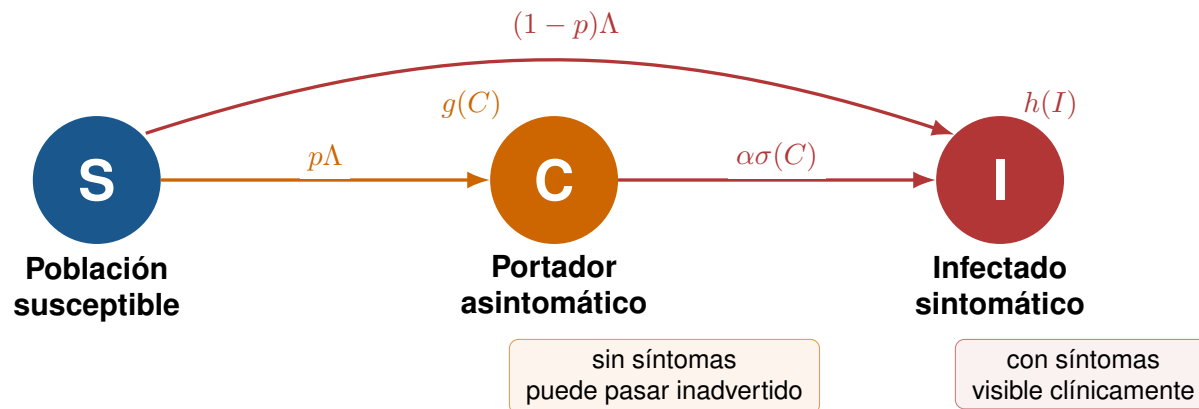
Bajo las condiciones estructurales sobre f , g , h y σ , $\mathcal{R}_0$ determina el **destino global de las soluciones**.

Motivación epidemiológica: la infección que no se ve

ausencia de síntomas $\nrightarrow$ ausencia de transmisión: $g(C)$ y $h(I)$ representan **fuentes distintas de incidencia**.

$$\Lambda(S, C, I) = f(S) [g(C) + h(I)], \quad \underbrace{p\Lambda}_{\text{hacia } C} + \underbrace{(1-p)\Lambda}_{\text{hacia } I} = \Lambda, \quad 0 < p < 1.$$

Dos fuentes de transmisión



Funciones y mecanismos diferenciados

- $f(S)$ modula la incidencia según el estado susceptible.
- $g(C)$ y $h(I)$ representan las contribuciones de portadores y sintomáticos.
- $p\Lambda$ y $(1-p)\Lambda$ distribuyen las nuevas infecciones, mientras $\alpha\sigma(C)$ regula la progresión $C \rightarrow I$.

Agrupar C e I elimina diferencias de transmisión, visibilidad clínica y progresión.

Motivación epidemiológica: Hsu y Hsieh (2008); Chisholm et al. (2018).

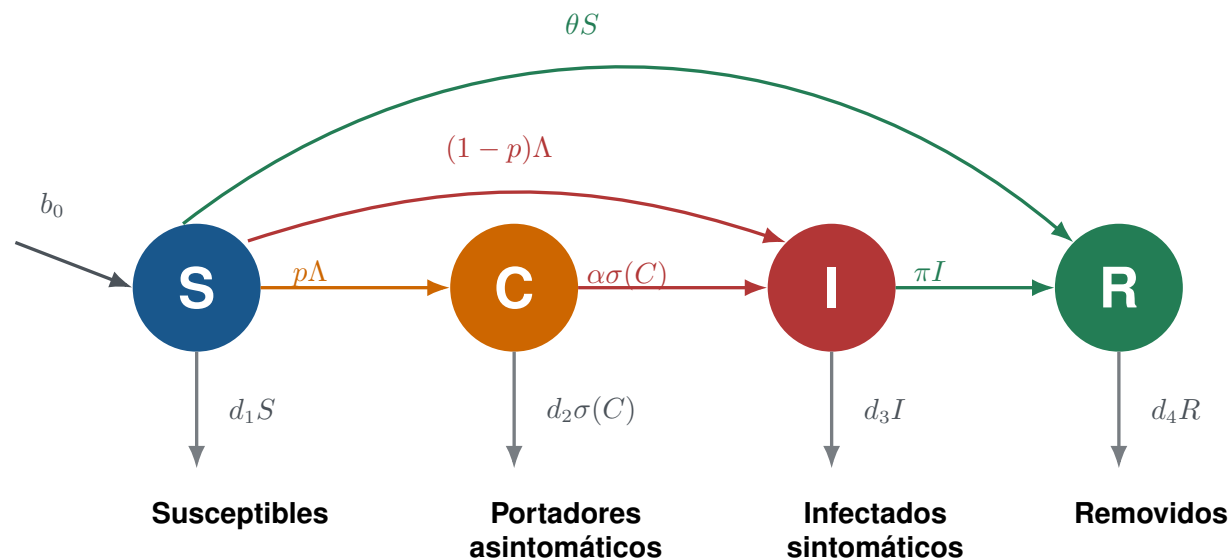
El modelo SCIR: flujos, ramificación y mecanismos no lineales

Incidencia, ramificación y salida portadora

$$\Lambda(S, C, I) = f(S) [g(C) + h(I)], \quad \underbrace{p\Lambda}_{\text{hacia } C} + \underbrace{(1-p)\Lambda}_{\text{hacia } I} = \Lambda, \quad 0 < p < 1.$$

salida total desde $C : (d_2 + \alpha)\sigma(C)$, progresión $C \rightarrow I : \alpha\sigma(C)$.

Rutas epidemiológicas principales



Balance por compartimento

Cada ecuación se lee como $\dot{X} = \text{entradas} - \text{salidas}$.

$$\begin{aligned} \dot{S} &= \underbrace{b_0}_{\text{entrada}} - \underbrace{[\Lambda + \theta S + d_1 S]}_{\text{salidas}} \\ \dot{C} &= \underbrace{p\Lambda}_{\text{entrada}} - \underbrace{(d_2 + \alpha)\sigma(C)}_{\text{salidas}} \\ \dot{I} &= \underbrace{(1-p)\Lambda + \alpha\sigma(C)}_{\text{entradas}} - \underbrace{(d_3 + \pi)I}_{\text{salidas}} \\ \dot{R} &= \underbrace{\theta S + \pi I}_{\text{entradas}} - \underbrace{d_4 R}_{\text{salida}} \end{aligned}$$

Estructura triangular: (S, C, I) es un subsistema cerrado gobernado por f, g, h y σ ; la variable R se recupera después y no retroalimenta la transmisión.

Condiciones estructurales sobre las funciones

Del comportamiento local al control global

Las pendientes en el origen describen el comportamiento inicial de la infección; la regularidad, la monotonía, la coercividad y los cocientes controlan la dinámica en toda la región biológica.

1. Regularidad y frontera

Las funciones son continuas y localmente Lipschitz, con

$$f(0) = g(0) = h(0) = \sigma(0) = 0$$

y valores positivos para argumentos positivos.

Estas propiedades garantizan:

- existencia y unicidad de las soluciones;
- ausencia de transmisión espontánea;
- invariancia del ortante no negativo.

2. Monotonía y coercividad

f, σ estrictamente crecientes,
 g, h crecientes, $\lim_{C \rightarrow \infty} \sigma(C) = \infty$.

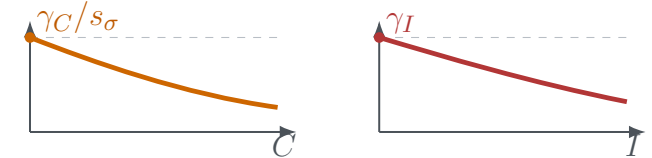
La monotonía permite comparar estados y flujos. La coercividad de σ proporciona acotación y, junto con su crecimiento estricto, garantiza la existencia de σ^{-1} en $\mathbb{R}_+$.

3. Transmisión relativa

Para $C, I > 0$:

$\frac{g(C)}{\sigma(C)}$, $\frac{h(I)}{I}$ no crecientes.

$$\lim_{C \rightarrow 0^+} \frac{g(C)}{\sigma(C)} = \frac{\gamma_C}{s_\sigma}, \quad \lim_{I \rightarrow 0^+} \frac{h(I)}{I} = \gamma_I.$$



Cotas globales:

$$g(C) \leq \frac{\gamma_C}{s_\sigma} \sigma(C), \quad h(I) \leq \gamma_I I.$$

La versión estricta fija el conjunto de igualdad

Consecuencia analítica

$$\boxed{\text{pendientes locales}} \implies \boxed{\text{cotas globales}} \implies \boxed{\dot{L} \leq 0}.$$

Equilibrio libre y número reproductivo básico

Equilibrio libre de enfermedad

$$S_0 = \frac{b_0}{\theta + d_1}.$$

$$E_0 = (S_0, 0, 0),$$

$$\hat{E}_0 = \left(S_0, 0, 0, \frac{\theta S_0}{d_4} \right).$$

Número reproductivo básico: $\mathcal{R}_0 = \rho(FV^{-1})$

$$\mathcal{R}_0 = f(S_0) \left[\underbrace{\frac{p\gamma_C}{(d_2 + \alpha)s_\sigma}}_{\text{etapa portadora}} + \underbrace{\frac{\gamma_I}{d_3 + \pi} \left(1 - p + \frac{\alpha p}{d_2 + \alpha} \right)}_{\text{etapa sintomática}} \right].$$

$$\mathcal{R}_0 = \mathcal{R}_C + \mathcal{R}_I$$

Comportamiento cerca de E_0

$$g(C) = \gamma_C C + o(C), \quad h(I) = \gamma_I I + o(I),$$

$$\sigma(C) = s_\sigma C + o(C).$$

Ruta 1: transmisión durante la etapa C

La contribución portadora se descompone como **acceso** $\times$ **transmisión** $\times$ **permanencia**:

$$\mathcal{R}_C = f(S_0) \underbrace{p}_{\text{acceso a } C} \underbrace{\gamma_C}_{\text{transmisión}} \underbrace{\frac{1}{(d_2 + \alpha)s_\sigma}}_{\text{permanencia}}.$$

Ruta 2: transmisión durante la etapa I

La contribución sintomática se descompone como **acceso** $\times$ **transmisión** $\times$ **permanencia**:

$$\mathcal{R}_I = f(S_0) \underbrace{\left(1 - p + \frac{\alpha p}{d_2 + \alpha} \right)}_{\text{acceso total a } I} \underbrace{\gamma_I}_{\text{transmisión}} \underbrace{\frac{1}{d_3 + \pi}}_{\text{permanencia}}.$$

$\mathcal{R}_0 < 1$: **decaimiento**

$\mathcal{R}_0 = 1$: **caso crítico**

$\mathcal{R}_0 > 1$: **crecimiento inicial**

El equilibrio endémico se reduce a una variable

Variable de reducción

En un equilibrio endémico definimos $\Lambda^* = f(S^*)[g(C^*) + h(I^*)]$. **Conocida Λ^* , se reconstruyen todas las componentes.**

Reconstrucción a partir de Λ

$$\kappa_C = \frac{p}{d_2 + \alpha}, \quad \kappa_I = \frac{1 - p + \alpha p / (d_2 + \alpha)}{d_3 + \pi}.$$

$$S(\Lambda) = \frac{b_0 - \Lambda}{\theta + d_1},$$

$$C(\Lambda) = \sigma^{-1}(\kappa_C \Lambda),$$

$$I(\Lambda) = \kappa_I \Lambda.$$

La coercividad y monotonía estricta de σ garantizan que σ^{-1} está bien definida en $\mathbb{R}_+$.

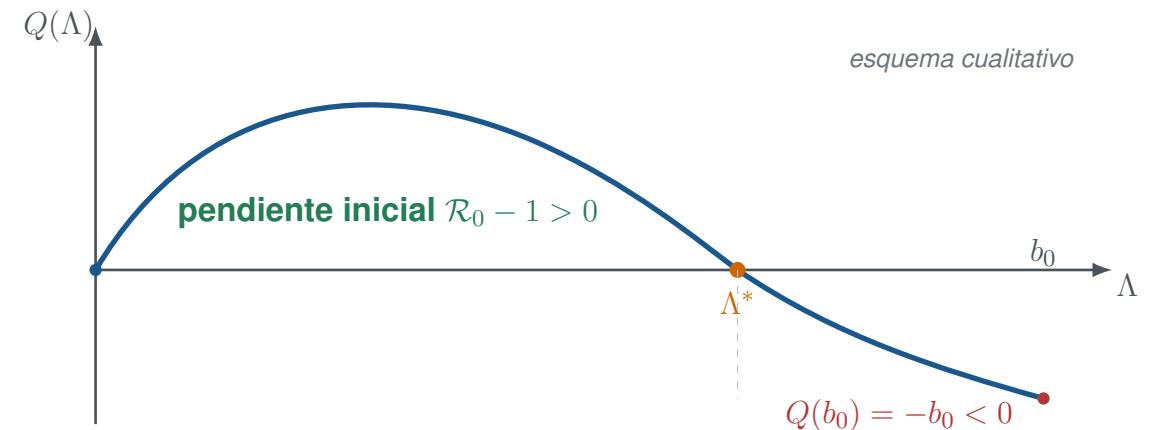
Existencia del equilibrio endémico

$$Q(0) = 0, \quad \lim_{\Lambda \rightarrow 0^+} \frac{Q(\Lambda)}{\Lambda} = \mathcal{R}_0 - 1, \quad Q(b_0) = -b_0.$$

$$\mathcal{R}_0 > 1 \implies \exists \Lambda^* \in (0, b_0) \implies S^*, C^*, I^* > 0.$$

Una ecuación escalar en $0 < \Lambda < b_0$

$$Q(\Lambda) = f\left(\frac{b_0 - \Lambda}{\theta + d_1}\right) [g(\sigma^{-1}(\kappa_C \Lambda)) + h(\kappa_I \Lambda)] - \Lambda.$$

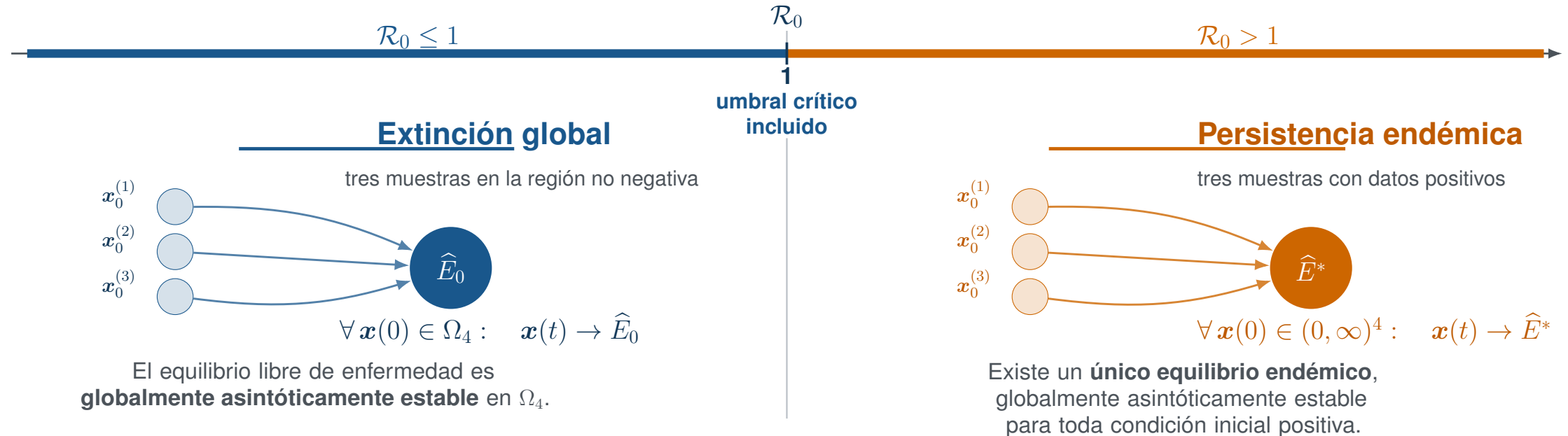


La reducción demuestra **existencia**. La unicidad y la atracción global seguirán del análisis de Lyapunov–LaSalle.

Número reproductivo básico y dinámica global

Dicotomía completa

Bajo las hipótesis estructurales del modelo, el **número reproductivo básico** caracteriza la **propagación cerca de E_0** y determina también la **existencia de equilibrios** y el **destino global** de las soluciones.



Notación: $\hat{E}_0$ y $\hat{E}^*$ son los equilibrios del sistema SCIR completo, y $\Omega_4 = \mathbb{R}_+^4$ es su región biológica no negativa. La extinción vale para $x(0) \in \Omega_4$; la persistencia endémica, para $x(0) \gg 0$. La estricta decrecencia de $g(C)/\sigma(C)$ y $h(I)/I$ garantiza la unicidad endémica.

Prueba I: extinción global cuando $\mathcal{R}_0 \leq 1$

Ruta de la prueba

1 Construir
 $V_0 \geq 0$

2 Probar
 $\dot{V}_0 \leq 0$

3 Identificar
 $\mathcal{M}(\{V_0 = 0\})$

4 Aplicar LaSalle
 $x(t) \rightarrow \hat{E}_0$

Construcción y positividad

$$V_0(S, C, I) = K_0 \left[S - S_0 - f(S_0) \int_{S_0}^S \frac{d\tau}{f(\tau)} \right] + B_0 C + D_0 I.$$

El bloque integral mide la separación respecto de S_0 , mientras $B_0 C + D_0 I$ mide la presencia de infección.

Los pesos $K_0, B_0, D_0 > 0$ se eligen de modo que

$$\mathcal{R}_0 = f(S_0)K_0.$$

$$V_0 \geq 0, \quad V_0 = 0 \iff (S, C, I) = E_0.$$

Derivada: dos términos no positivos

Las hipótesis de cociente proporcionan las cotas

$$g(C) \leq \frac{\gamma_C}{s_\sigma} \sigma(C), \quad h(I) \leq \gamma_I I.$$

Al derivar y reagrupar:

$$\begin{aligned} \dot{V}_0 \leq & \underbrace{K_0(\theta + d_1)(S_0 - S) \left(1 - \frac{f(S_0)}{f(S)}\right)}_{\mathcal{B}_S \leq 0} \\ & + \underbrace{(\mathcal{R}_0 - 1)[g(C) + h(I)]}_{\leq 0 \text{ si } \mathcal{R}_0 \leq 1}. \end{aligned}$$

$$\mathcal{R}_0 \leq 1 \implies \dot{V}_0 \leq 0.$$

De la igualdad a la convergencia global

Analizar $\{\dot{V}_0 = 0\}$

$\mathcal{R}_0 < 1$: $\dot{V}_0 = 0 \Rightarrow (S, C, I) = E_0$.

$\mathcal{R}_0 = 1$: $\dot{V}_0 = 0 \Rightarrow S = S_0$; sobre $S = S_0$,
 $\dot{S} = -f(S_0)[g(C) + h(I)] < 0$ si $C + I > 0$.
Por invariancia, $C = I = 0$.

Invariancia

$$\mathcal{M}(\{\dot{V}_0 = 0\}) = \{E_0\}$$

Principio de LaSalle

Reducido: $(S, C, I) \rightarrow E_0$

Completo: $x(t) \rightarrow \hat{E}_0$

Prueba II: estabilidad global del equilibrio endémico

Ruta de la prueba para $\mathcal{R}_0 > 1$

1 Construir
 $L \geq 0$

2 Elegir pesos
 $A, B, D > 0$

3 Probar
 $\dot{L} \leq 0$

4 Aplicar LaSalle
 $x(t) \rightarrow \hat{E}^*$

Construcción y positividad

$$L(S, C, I) = A \left[S - S^* - f(S^*) \int_{S^*}^S \frac{d\tau}{f(\tau)} \right] \\ + B \left[C - C^* - \sigma(C^*) \int_{C^*}^C \frac{d\tau}{\sigma(\tau)} \right] \\ + D \left[I - I^* - I^* \ln \left(\frac{I}{I^*} \right) \right].$$

Para $S, C, I > 0$, los tres bloques siguen las no linealidades f , σ y la clase sintomática; la monotonía estricta y $x - 1 - \ln x \geq 0$ garantizan la positividad.

$$L \geq 0, \quad L = 0 \iff (S, C, I) = E^*.$$

Del signo de $\dot{L}$ a la estabilidad global

Desigualdad AM–GM

$$x_1 x_2 x_3 = 1 \\ \implies 3 - x_1 - x_2 - x_3 \leq 0$$

Cocientes relativos

$$g(C)/\sigma(C), h(I)/I \\ \text{no crecientes}$$

Signo e igualdad

$$\dot{L} \leq 0 \\ \text{estricta decrecencia} \implies \\ \dot{L} = 0 \implies (S, C, I) = E^*$$

Principio de LaSalle

$\mathcal{M}(\{\dot{L} = 0\}) = \{E^*\}$
Reducido: $(S, C, I) \rightarrow E^*$
Completo: $x(t) \rightarrow \hat{E}^*$
Todo equilibrio positivo es una trayectoria constante
 $\implies E^*$ es único.

Pesos y estructura de la derivada

Los pesos reproducen los balances de E^* :

$$A = pB + (1 - p)D, \\ Bpf(S^*)h(I^*) = D(1 - p)f(S^*)g(C^*) \\ + D\alpha\sigma(C^*).$$

Así, los flujos se cancelan y

$$\dot{L} = \mathcal{B}_S + \mathcal{B}_C + \mathcal{B}_I.$$

Los tres bloques se controlan con las hipótesis estructurales.

Mismo $\mathcal{R}_0$, distintos niveles endémicos

Experimento D: qué permanece y qué cambia

Familia no lineal

$$\sigma_q(C) = C \left(1 + \frac{qC}{K_\sigma + C} \right),$$

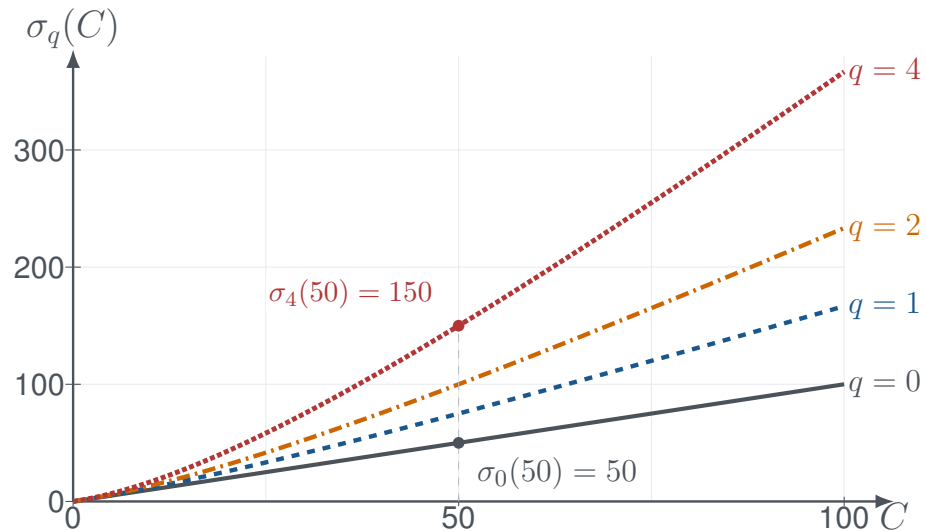
$K_\sigma = 50, \quad q \in \{0, 1, 2, 4\}$
resto de parámetros fijos

$$\sigma'_q(0) = s_\sigma = 1 \quad \xRightarrow{\mathcal{R}_0 \text{ fijo}} \quad \mathcal{R}_0 = 1.472259$$

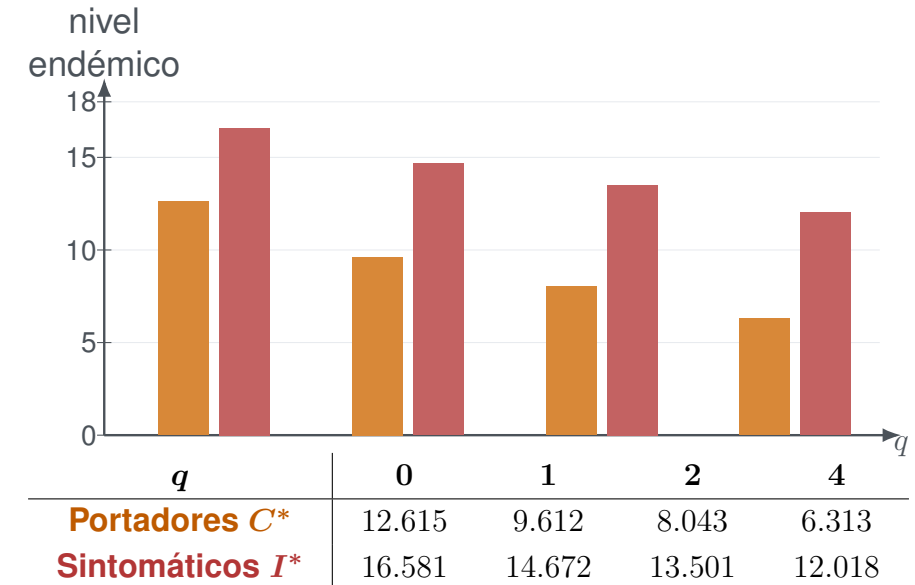
Observación numérica

$q \uparrow \Rightarrow \sigma_q(C) \uparrow \quad (C > 0)$
en este experimento: $C_q^*, I_q^* \downarrow$

La pendiente local coincide; la forma global cambia



Niveles endémicos al aumentar q



Lectura: el umbral no determina la carga endémica

Portadores C^*
 $\downarrow 50 \%$

Sintomáticos I^*
 $\downarrow 27.5 \%$

Mecanismo

$\sigma'_q(0)$ determina $\mathcal{R}_0$;
la forma global de σ_q
controla la carga endémica.

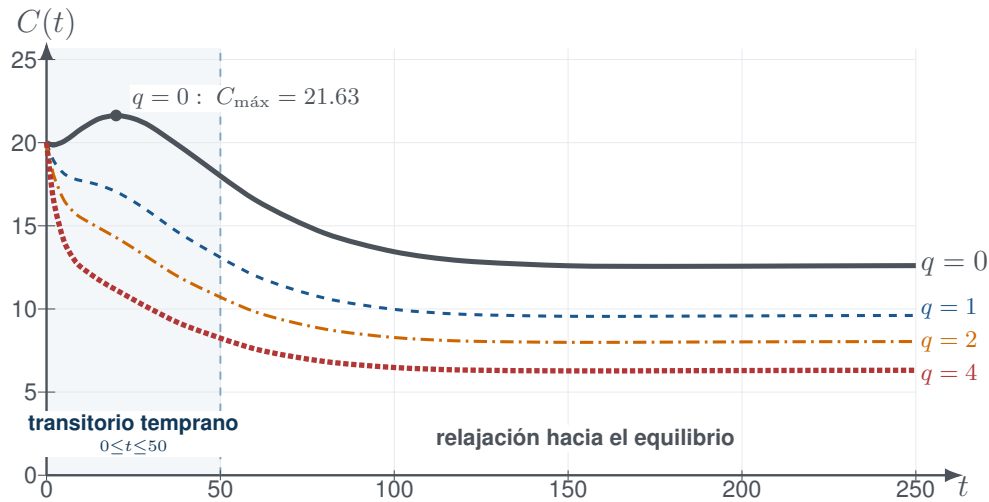
Mismo $\mathcal{R}_0$, trayectorias transitorias distintas

Misma condición inicial y mismo $\mathcal{R}_0$

$$X_0 = (S(0), C(0), I(0)) = (300, 20, 10) \quad \mathcal{R}_0 = 1.472259$$

La forma de σ_q modifica el **transitorio** y el **nivel límite**, sin modificar el número reproductivo básico.

Trayectorias de portadores $C(t)$

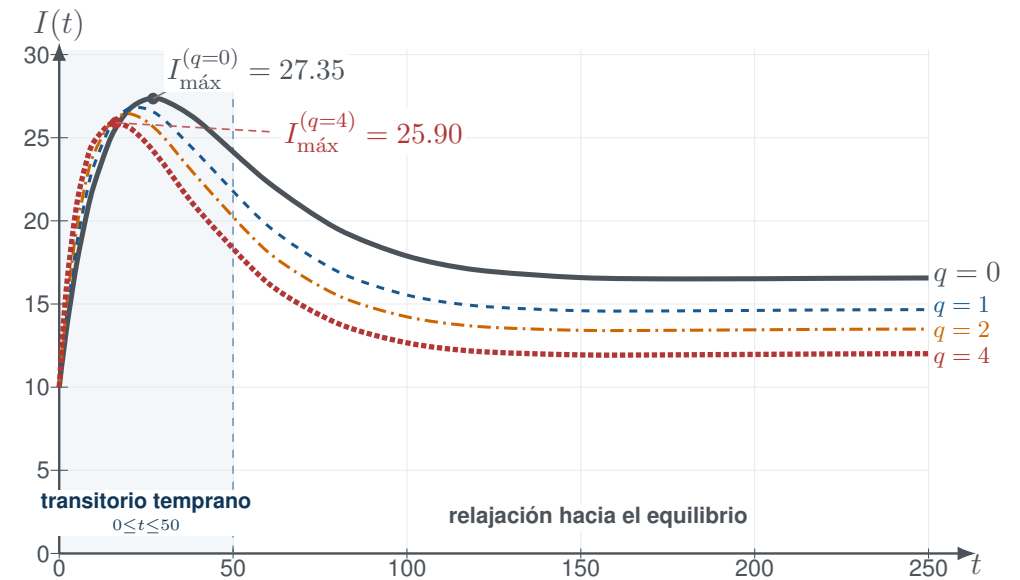


Lectura del transitorio

Portadores $C(t)$

$q \uparrow \implies$ descenso más rápido, menor acumulación y menor nivel límite.

Trayectorias sintomáticas $I(t)$



Sintomáticos $I(t)$

Los picos permanecen próximos, pero el equilibrio final se separa claramente.

Ilustración teórica; no calibración ni predicción.

Conclusiones y mensaje final

Respuesta a la pregunta central

$\mathcal{R}_0$ distingue extinción y persistencia endémica

Bajo las hipótesis estructurales sobre f , g , h y σ , aun con portadores asintomáticos, incidencia general y salida no lineal.

1. Modelo general

Modelo SCIR con portadores y sintomáticos, incidencia general y salida no lineal.

2. Teorema global

La dinámica global queda determinada por $\mathcal{R}_0$.

3. Lectura epidemiológica

$\sigma'_+(0)$ interviene en el umbral; la forma completa de σ determina la carga endémica y el transitorio.

$\mathcal{R}_0 \leq 1 \implies$ **extinción global**

$\mathcal{R}_0 > 1 \implies$ **persistencia endémica**

$$\forall \mathbf{x}(0) \in \Omega_4 : \quad C(t), I(t) \rightarrow 0, \quad \mathbf{x}(t) \rightarrow \hat{E}_0.$$

$$\exists! \hat{E}^* \gg 0, \quad \forall \mathbf{x}(0) \gg 0 : \quad \mathbf{x}(t) \rightarrow \hat{E}^*.$$

Gracias — Preguntas

Detalle algebraico de la prueba endémica

Cómo se obtiene el signo de $\dot{L}$

Los pesos reproducen los flujos del equilibrio; después, la desigualdad AM–GM y la monotonía de los cocientes controlan cada bloque de la derivada.

1. Pesos y derivada

$$A = pB + (1 - p)D,$$

$$Bpf(S^*)h(I^*) = D(1 - p)f(S^*)g(C^*) + D\alpha\sigma(C^*).$$

Con esta elección,

$$\begin{aligned}\dot{L} = & A \left(1 - \frac{f(S^*)}{f(S)}\right) \dot{S} \\ & + B \left(1 - \frac{\sigma(C^*)}{\sigma(C)}\right) \dot{C} \\ & + D \left(1 - \frac{I^*}{I}\right) \dot{I}.\end{aligned}$$

Las identidades del equilibrio permiten reagrupar los términos según las rutas de transmisión y progresión.

2. Bloque AM–GM

Por ejemplo,

$$x_1 = \frac{f(S^*)}{f(S)},$$

$$x_2 = \frac{f(S)g(C)\sigma(C^*)}{f(S^*)g(C^*)\sigma(C)},$$

$$x_3 = \frac{\sigma(C)g(C^*)}{\sigma(C^*)g(C)}.$$

La cancelación directa produce

$$x_1 x_2 x_3 = 1.$$

Por la desigualdad aritmético–geométrica,

$$\boxed{3 - x_1 - x_2 - x_3 \leq 0.}$$

El mismo patrón aparece en los demás ciclos de $\dot{L}$.

3. Cocientes y conjunto de igualdad

$$\left(\frac{g(C)}{g(C^*)} - 1\right) \left(1 - \frac{\sigma(C)g(C^*)}{\sigma(C^*)g(C)}\right) \leq 0,$$

porque g es creciente y g/σ es decreciente. Asimismo,

$$\left(\frac{h(I)}{h(I^*)} - 1\right) \left(1 - \frac{Ih(I^*)}{I^*h(I)}\right) \leq 0.$$

Por tanto,

$$\boxed{\dot{L} \leq 0.}$$

La igualdad exige sucesivamente

$$S = S^*, \quad C = C^*, \quad I = I^*.$$

Así, el mayor conjunto invariante es $\{E^*\}$.

Experimentos A–C: verificación numérica del umbral

Diseño común

Con $q = 2$ y las mismas doce condiciones iniciales, se comparan los regímenes subcrítico, crítico y supercrítico. Los cálculos ilustran los teoremas; no sustituyen la demostración analítica.

Experimento	β_C	β_I	$\mathcal{R}_0$	Régimen
A	0.00018	0.00025	0.736129	libre de enfermedad
B	0.0002445222	0.0003396142	1.000000	crítico
C	0.00036	0.00050	1.472259	endémico

Experimento A

Experimento B

Experimento C

$\mathcal{R}_0 = 0.736129 < 1$

$\mathcal{R}_0 = 1$

$\mathcal{R}_0 = 1.472259 > 1$

$E_0 = (250, 0, 0).$

$E_0 = (250, 0, 0).$

$E^* \approx (205.646, 8.043, 13.501).$

Las doce trayectorias convergen al equilibrio libre de enfermedad desde estados iniciales ampliamente separados.

También hay convergencia al equilibrio libre, pero con una cola asintótica considerablemente más lenta en $C(t)$ e $I(t)$.

Las doce trayectorias convergen al mismo equilibrio endémico, ilustrando existencia, unicidad y estabilidad global.

Extinción global

Caso crítico incluido

Persistencia endémica

Parámetros ilustrativos del artículo; no corresponden a una calibración de una enfermedad específica.