

XIV CONGRESO DE LA SOCIEDAD LATIOAMERICANA DE BIOLOGÍA MATEMÁTICA

Universidad Nacional de Asunción, San Lorenzo, Paraguay.

05 al 09 de octubre de 2026

Análisis de estabilidad y bifurcación de Hopf en un sistema difusivo presa-predador, con respuesta funcional de Holling tipo II en un dominio espacio-temporal rectangular

Jhon Jairo Pérez – Wilmer Molina – Alex Manuel Montes

Departamento de Matemáticas

Universidad del Cauca, Popayán, Colombia

e-mail: jjperez@unicauca.edu.co – wilimoliny@unicauca.edu.co – amontes@unicauca.edu.co

Los modelos presa-predador con difusión constituyen una herramienta fundamental para el estudio de fenómenos espacio-temporales en ecología matemática. Entre ellos, el modelo de Rosenzweig-MacArthur con respuesta funcional de Holling tipo II ha sido ampliamente utilizado para describir procesos de coexistencia, oscilaciones poblacionales y formación de patrones espaciales.

En este trabajo consideramos el sistema de reacción-difusión

$$\begin{cases} u_t - d_1 \Delta u = u \left(1 - \frac{u}{k}\right) - \frac{mu v}{u+1}, & x \in \Omega, t > 0, \\ v_t - d_2 \Delta v = -\theta v + \frac{mu v}{u+1}, & x \in \Omega, t > 0, \\ \partial_\eta u = \partial_\eta v = 0, & x \in \partial\Omega, t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x) \geq 0, \quad v(x, 0) = v_0(x) \geq 0, & x \in \Omega. \end{cases} \quad (1)$$

sujeto a condiciones de frontera de Neumann homogéneas en el dominio bidimensional $\Omega = (0, \ell\pi) \times (0, \ell\pi)$. Aquí, k representa la capacidad de carga reescalada, θ la tasa de mortalidad del depredador y m la intensidad de interacción entre las especies. Tomando $\lambda = \frac{\theta}{m-\theta}$, como parámetro de bifurcación, estudiamos la estabilidad del equilibrio positivo de coexistencia (λ, v_λ) con $v_\lambda = \frac{(k-\lambda)(1+\lambda)}{km}$ y la aparición de bifurcaciones de Hopf inducidas por difusión.

Nuestro trabajo está motivado por el artículo de Yi, Wei y Shi (2009), quienes analizaron este mismo modelo en el dominio unidimensional $\Omega = (0, \ell\pi)$, estableciendo condiciones para la ocurrencia de bifurcaciones de Hopf espaciales y no espaciales, y determinando el signo del primer coeficiente de Lyapunov asociado a las soluciones periódicas emergentes. El principal aporte de esta investigación consiste en extender dichos resultados al caso bidimensional. La transición de una a dos dimensiones modifica sustancialmente la estructura espectral del operador de Laplace con condiciones de Neumann, generando una familia más rica de modos espaciales críticos. Mediante la teoría de bifurcación de Hopf para ecuaciones de reacción-difusión, reducción al espacio central y teoría de formas normales, obtenemos expresiones explícitas para el primer coeficiente de Lyapunov correspondiente tanto a las bifurcaciones homogéneas como a las no homogéneas. Estos resultados permiten determinar la dirección de la bifurcación y la estabilidad de las órbitas periódicas emergentes para cada modo espacial crítico. En consecuencia, se obtiene una generalización de los criterios desarrollados por Yi, Wei y Shi al contexto bidimensional, proporcionando una descripción más completa de la dinámica oscilatoria inducida por difusión. Finalmente, simulaciones numéricas corroboran las predicciones teóricas y muestran la aparición de patrones espacio-temporales consistentes con el análisis analítico realizado.

Introducción

Los modelos presa-depredador con difusión constituyen una herramienta fundamental para el estudio de la dinámica espacio-temporal de poblaciones biológicas. La incorporación de mecanismos de difusión permite describir la dispersión de las especies en el hábitat y analizar fenómenos complejos como la formación de patrones espaciales, ondas de propagación y procesos de autoorganización. Entre los modelos más estudiados se encuentra el modelo de Rosenzweig-MacArthur con respuesta funcional de Holling tipo II, ampliamente utilizado para describir la saturación del depredador en sistemas ecológicos reales [11, 12]. La dinámica de estos sistemas está estrechamente relacionada con las bifurcaciones de Hopf, las cuales describen la transición desde estados estacionarios hacia soluciones periódicas. En presencia de difusión, la interacción entre la estructura espectral del operador de Laplace y la dinámica local puede generar oscilaciones espacialmente heterogéneas y patrones espacio-temporales de gran complejidad. En [3], los autores estudiaron un modelo presa-depredador con difusión, condiciones de frontera de Neumann y respuesta funcional de Holling tipo II en un dominio unidimensional. Mediante un análisis de bifurcación de Hopf demostraron la existencia de múltiples valores críticos asociados a distintos modos espaciales, a partir de los cuales emergen soluciones periódicas no homogéneas. Sin embargo, dicho estudio se restringe al caso unidimensional.

Motivados por esta limitación, en el presente trabajo extendemos los resultados de [3] al dominio bidimensional

$$\Omega = (0, \ell\pi) \times (0, \ell\pi), \quad \ell \in \mathbb{R}^+,$$

sujeto a condiciones de frontera de Neumann homogéneas. El paso de una dimensión a dos dimensiones enriquece significativamente la estructura espectral del operador de difusión y permite la aparición de nuevos modos espaciales y patrones dinámicos ausentes en el caso unidimensional. Adaptando el procedimiento analítico desarrollado en [3], determinamos la estabilidad del equilibrio positivo y calculamos el primer coeficiente de Lyapunov asociado a cada modo espacial. Los resultados obtenidos generalizan los criterios de estabilidad y la caracterización de la bifurcación de Hopf al contexto bidimensional. Además, simulaciones numéricas de las ecuaciones diferenciales parciales muestran una excelente concordancia con las predicciones teóricas y permiten visualizar la dinámica espacio-temporal del sistema.

Consideramos el sistema presa-depredador con difusión y condiciones de Neumann

$$\begin{cases} U_t - d_1 \Delta U &= AU \left(1 - \frac{U}{N}\right) - \frac{B UV}{C + U}, & x \in \Omega, t > 0, \\ V_t - d_2 \Delta V &= -DV + \frac{E UV}{C + U}, & x \in \Omega, t > 0, \\ \partial_\eta U = \partial_\eta V &= 0, & x \in \partial\Omega, t > 0, \\ U(x, 0) = U_0(x) \geq 0, \quad V(x, 0) = V_0(x) \geq 0, & x \in \Omega. \end{cases} \quad (2)$$

donde $\Omega = (0, \ell\pi) \times (0, \ell\pi)$, $\ell > 0$, es un dominio acotado de $\mathbb{R}^2$ con frontera suave $\partial\Omega$. Las funciones $U(x, y, t)$ y $V(x, y, t)$ representan las densidades de presa y depredador, respectivamente; $d_1, d_2 > 0$ son los coeficientes de difusión, mientras que $A, B, C, D, E, N > 0$ corresponden a los parámetros biológicos del modelo de Rosenzweig-MacArthur. Las condiciones de Neumann describen un sistema cerrado sin flujo a través de la frontera. Para reducir el número de parámetros introducimos la transformación adimensional

$$s = At, \quad u = \frac{U}{C}, \quad v = \frac{B}{EC}V, \quad d'_i = A^{-1}d_i, \quad i = 1, 2,$$

y definimos

$$k = \frac{N}{C}, \quad m = \frac{E}{A}, \quad \theta = \frac{D}{A}.$$

Renombrando las variables obtenemos el sistema

$$\begin{cases} u_t - d_1 \Delta u &= u \left(1 - \frac{u}{k}\right) - \frac{muv}{u+1}, & x \in \Omega, t > 0, \\ v_t - d_2 \Delta v &= -\theta v + \frac{muv}{u+1}, & x \in \Omega, t > 0, \\ \partial_\eta u = \partial_\eta v &= 0, & x \in \partial\Omega, t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x) \geq 0, \quad v(x, 0) = v_0(x) \geq 0, & x \in \Omega. \end{cases} \quad (3)$$

Aquí, k es la capacidad de carga reescalada, θ la tasa de mortalidad del depredador y m la intensidad de interacción entre especies. El sistema ODE asociado a (3) posee un ciclo límite único relacionado con la paradoja del enriquecimiento. Sin embargo, la incorporación de difusión genera dinámicas espaciales más complejas. Aunque se conocen resultados sobre estabilidad y formación de patrones, la estructura de las bifurcaciones inducidas por

difusión permanece sólo parcialmente comprendida. Aunque existen resultados que garantizan la estabilidad de estados estacionarios y la aparición de patrones complejos observados numéricamente, la estructura teórica de las bifurcaciones inducidas por la difusión aún no está completamente caracterizada. En particular, la comprensión de los mecanismos que conducen a la pérdida de estabilidad de los estados de coexistencia requiere examinar previamente la dinámica del sistema homogéneo asociado. Al eliminar los términos difusivos en (3) se obtiene el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias dado por

$$\begin{cases} u' = u \left(1 - \frac{u}{k}\right) - \frac{muv}{u+1}, \\ v' = -\theta v + \frac{muv}{u+1}. \end{cases} \quad (4)$$

Los sistemas (3) y (4) poseen tres equilibrios no negativos: el trivial $E_0 = (0, 0)$, el semi-trivial $E_1 = (k, 0)$ y el equilibrio de coexistencia $E_2 = (\lambda, v_\lambda)$, donde

$$\lambda = \frac{\theta}{m - \theta}, \quad v_\lambda = \frac{(k - \lambda)(1 + \lambda)}{km}.$$

La existencia biológica de E_2 requiere que $0 < \lambda < k$. El análisis lineal del sistema (4) muestra que E_0 es siempre un punto de silla. Además, si $m < \theta$ (equivalentemente, $\lambda < 0$), entonces E_1 es un punto de silla y E_2 no es admisible biológicamente. Cuando $\theta < m < \theta(k+1)/k$ (es decir, $0 < k < \lambda$), el equilibrio E_1 es localmente asintóticamente estable mientras que E_2 carece de significado biológico al verificarse $v_\lambda < 0$. Finalmente, si $m > \theta(k+1)/k$ (equivalentemente, $0 < \lambda < k$), entonces E_1 es un punto de silla y el equilibrio de coexistencia E_2 resulta biológicamente relevante. En lo que sigue, se establecen condiciones que garantizan la estabilidad global de E_1 y E_2 .

Teorema. Si $k < \lambda$ (equivalentemente, $m < \theta(k+1)/k$), entonces $E_1(k, 0)$ es globalmente asintóticamente estable; es decir, $E_1(k, 0)$ atrae toda solución positiva de (3).

Teorema. Si $0 < k \leq 1$, o bien $k > 1$ con $k - 1 \leq \lambda < k$, entonces la solución constante positiva $E_2(\lambda, v_\lambda)$ es globalmente asintóticamente estable; es decir, $E_2(\lambda, v_\lambda)$ atrae a toda solución positiva de (3).

Debido a la estabilidad global establecida en el teorema anterior, en lo sucesivo suponemos $k > 1$ y restringimos el análisis al intervalo $0 < \lambda < k - 1$. En torno al equilibrio $E_2(\lambda, v_\lambda)$, introducimos el cambio de variables $\hat{u} = u - \lambda$, $\hat{v} = v - v_\lambda$ y, por simplicidad, seguimos denotando las nuevas variables por u y v . Entonces, el sistema (3) se transforma en

$$\begin{cases} u_t = d_1 \Delta u + f(u, v) & (x, y) \in \Omega, t > 0, \\ v_t = d_2 \Delta v + g(u, v) & (x, y) \in \Omega, t > 0, \end{cases} \quad (5)$$

donde

$$f(u, v) = (u + \lambda) \left(1 - \frac{u + \lambda}{k}\right) - \frac{m(u + \lambda)(v + v_\lambda)}{u + \lambda + 1}$$

$$g(u, v) = -\theta(v + v_\lambda) + \frac{m(u + \lambda)(v + v_\lambda)}{u + \lambda + 1},$$

con

$$u(x, y, 0) = u_0(x, y) - \lambda, \quad v(x, y, 0) = v_0(x, y) - v_\lambda, \quad (x, y) \in \Omega, \quad (6)$$

y

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial v}{\partial \eta} = 0, \quad (x, y) \in \partial\Omega, t > 0. \quad (7)$$

Dado que el punto crítico de estudio E_2 se ha trasladado al origen, el sistema Reacción-Difusión (5) toma la forma:

$$\begin{cases} u_t = d_1 \Delta u + f(\lambda, u, v), \\ v_t = d_2 \Delta v + g(\lambda, u, v), \end{cases} \quad (8)$$

y su linealización en el punto de equilibrio $(\lambda, 0, 0)$ viene dada por:

$$\begin{pmatrix} u_t \\ v_t \end{pmatrix} = L(\lambda) \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad (9)$$

donde,

$$L(\lambda) = \begin{pmatrix} d_1 \Delta + A(\lambda) & B(\lambda) \\ C(\lambda) & d_2 \Delta + D(\lambda) \end{pmatrix},$$

y

$$\begin{aligned}
A(\lambda) &= f_u(\lambda, 0, 0) = \frac{\lambda(k - 2\lambda - 1)}{k(1 + \lambda)}, \\
B(\lambda) &= f_v(\lambda, 0, 0) = \frac{m\lambda}{1 + \lambda} = -\theta, \\
C(\lambda) &= g_u(\lambda, 0, 0) = \frac{k - \lambda}{k(1 + \lambda)}, \\
D(\lambda) &= g_v(\lambda, 0, 0) = -\theta + \frac{m\lambda}{1 + \lambda} = 0.
\end{aligned} \tag{10}$$

Con el fin de resolver (9) con las condiciones de Neumann (6) y (7), se considera el problema espectral

$$\begin{cases} -\Delta\varphi = \mu\varphi; & \mathbf{x} = (x, y) \in \Omega, \\ \frac{\partial\varphi}{\partial\eta}(\mathbf{x}) = \nabla\varphi \cdot \eta = 0; & \mathbf{x} \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{11}$$

donde $\Omega = (0, \ell\pi) \times (0, \ell\pi)$, $\ell \in \mathbb{R}^+$. La solución de (11) equivale a determinar los valores propios μ y las correspondientes autofunciones del operador $-\Delta$ bajo condiciones homogéneas de Neumann. En particular, para cada $n, m \in \mathbb{N}_0$, $\varphi(x, y) = \cos\left(\frac{nx}{\ell}\right) \cos\left(\frac{my}{\ell}\right)$ es una autofunción asociada al valor propio $\mu = \frac{n^2}{\ell^2} + \frac{m^2}{\ell^2}$. Usando esta base de autofunciones, el operador lineal $L(\lambda)$ puede descomponerse en una familia de operadores matriciales parametrizados por (n, m) . Más precisamente, $q = \cos\left(\frac{n}{\ell}x\right) \cos\left(\frac{m}{\ell}y\right) \begin{pmatrix} a_{nm} \\ b_{nm} \end{pmatrix}$ es un auto función de $L(\lambda)$ asociado a un valor propio α , si y sólo si $\begin{pmatrix} a_{nm} \\ b_{nm} \end{pmatrix}$ es vector propio de $L_{n,m}(\lambda)$ asociado al mismo valor propio α , donde

$$L_{n,m}(\lambda) := \begin{pmatrix} A(\lambda) - d_1 \left(\frac{n^2}{\ell^2} + \frac{m^2}{\ell^2} \right) & B(\lambda) \\ C(\lambda) & D(\lambda) - d_2 \left(\frac{n^2}{\ell^2} + \frac{m^2}{\ell^2} \right) \end{pmatrix}. \tag{12}$$

De forma análoga, si se considera soluciones de la forma

$$u(x, y, t) = a_{nm}(t) \cos\left(\frac{nx}{\ell}\right) \cos\left(\frac{my}{\ell}\right) \quad y \quad v(x, y, t) = b_{nm}(t) \cos\left(\frac{nx}{\ell}\right) \cos\left(\frac{my}{\ell}\right),$$

entonces (u, v) satisfacen (9), si y sólo si $\begin{pmatrix} a_{nm}(t) \\ b_{nm}(t) \end{pmatrix}$ satisfacen el sistema lineal ordinario

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} a_{n,m}(t) \\ b_{n,m}(t) \end{pmatrix} = L_{n,m}(\lambda) \begin{pmatrix} a_{n,m}(t) \\ b_{n,m}(t) \end{pmatrix}.$$

Se define el espacio de soluciones admisibles

$$X := \left\{ (u, v) \in H^2(\Omega) \times H^2(\Omega) : \left(\frac{\partial u}{\partial \eta}, \frac{\partial v}{\partial \eta} \right) = \mathbf{0} \text{ en } \partial\Omega \right\}.$$

Por otro lado,

$$\beta^2 - T_{n,m}(\lambda)\beta + D_{n,m}(\lambda) = 0; \quad n, m \in \mathbb{N}_0, \tag{13}$$

es la ecuación característica de $L_{n,m}(\lambda)$ donde $T_{n,m}(\lambda) = \text{Tr}(L_{n,m}(\lambda))$ y $D_{n,m}(\lambda) = \text{Det}(L_{n,m}(\lambda))$, con valores propios

$$\beta = \frac{T_{n,m}(\lambda)}{2} \pm \frac{\sqrt{T_{n,m}^2(\lambda) - 4D_{n,m}(\lambda)}}{2} = \alpha_{n,m}(\lambda) \pm i\omega_{n,m}(\lambda),$$

tales que

$$\alpha_{n,m}(\lambda) = \frac{T_{n,m}(\lambda)}{2} \quad ; \quad \omega_{n,m}(\lambda) = \sqrt{D_{n,m}(\lambda) - \alpha_{n,m}^2(\lambda^*)}. \tag{14}$$

$$\begin{aligned}
T_{n,m}(\lambda) &= A(\lambda) + D(\lambda) - (d_1 + d_2) \left(\frac{n^2}{\ell^2} + \frac{m^2}{\ell^2} \right) \\
D_{n,m}(\lambda) &= \left[A(\lambda) - d_1 \left(\frac{n^2}{\ell^2} + \frac{m^2}{\ell^2} \right) \right] \left[D(\lambda) - d_2 \left(\frac{n^2}{\ell^2} + \frac{m^2}{\ell^2} \right) \right] - B(\lambda)C(\lambda).
\end{aligned}$$

Usando los resultados de (10) se sigue

$$\begin{aligned}
T_{n,m}(\lambda) &= \frac{\lambda(k-2\lambda-1)}{k(1+\lambda)} - (d_1 + d_2) \left(\frac{n^2}{\ell^2} + \frac{m^2}{\ell^2} \right), \\
D_{n,m}(\lambda) &= \frac{\theta(k-\lambda)}{k(1+\lambda)} - \frac{d_2\lambda(k-2\lambda-1)}{k(1+\lambda)} \left(\frac{n^2}{\ell^2} + \frac{m^2}{\ell^2} \right) + d_1d_2 \left(\frac{n^2}{\ell^2} + \frac{m^2}{\ell^2} \right)^2.
\end{aligned} \tag{15}$$

Con el fin de estudiar la ocurrencia de la bifurcación de Hopf, se supone la hipótesis. **(H₁)** Existe una vecindad V de λ^* tal que, para todo $\lambda \in V$, el operador $L(\lambda)$ posee un único par de valores propios complejos conjugados, simples y diferenciables respecto a λ , denotados por $\alpha(\lambda) \pm i\omega(\lambda)$, que satisfacen

$$\alpha(\lambda^*) = 0, \quad \omega(\lambda^*) = \omega_0 > 0, \quad \alpha'(\lambda^*) \neq 0,$$

además, todos los demás valores propios de $L(\lambda)$ tienen parte real no nula, y se identifican los valores de λ^* que cumplen **(H₁)**. Esta hipótesis es equivalente a la existencia de $n, m \in \mathbb{N}_0$ tal que

$$T_{n,m}(\lambda^*) = 0, \quad D_{n,m}(\lambda^*) > 0, \quad T_{j,k}(\lambda^*) \neq 0, \quad D_{j,k}(\lambda^*) \neq 0 \quad \forall j, k \in \mathbb{N}_0 : j^2 + k^2 \neq n^2 + m^2. \tag{16}$$

y para el único par de valores propios complejos puros se cumple la transversabilidad:

$$\alpha'(\lambda^*) \neq 0. \tag{17}$$

Ahora de (15), se tiene que, para todo $\lambda \in (\frac{k-1}{2}, k-1)$,

$$T_{n,m}(\lambda) < 0 \quad \text{y} \quad D_{n,m}(\lambda) > 0.$$

Por consiguiente, el estado estacionario $E_2(\lambda, v_\lambda)$ es localmente asintóticamente estable. En particular, el punto de bifurcación de Hopf λ^* que satisface la condición **(H₁)** debe encontrarse en el intervalo

$$\left(0, \frac{k-1}{2} \right].$$

Además,

$$\alpha(\lambda) = \frac{1}{2} \left[A(\lambda) - (d_1 + d_2) \left(\frac{n^2}{\ell^2} + \frac{m^2}{\ell^2} \right) \right], \quad \alpha'(\lambda) = \frac{1}{2} A'(\lambda),$$

Por otro lado, dado que

$$A(\lambda) = \frac{\lambda(k-2\lambda-1)}{k(1+\lambda)},$$

se obtiene

$$A'(\lambda) = \frac{k-1-4\lambda-2\lambda^2}{k(1+\lambda)^2}.$$

Para determinar el signo de $A'(\lambda)$, se analiza el polinomio

$$\varphi(\lambda) = -2\lambda^2 - 4\lambda + k - 1,$$

cuyas raíces están dadas por

$$\lambda_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 8(k-1)}}{-4} = -1 \pm \sqrt{\frac{k+1}{2}}.$$

Si se considera

$$\hat{\lambda} = -1 + \sqrt{\frac{k+1}{2}},$$

y dado que $k > 1$, se verifica que $\hat{\lambda} \in (0, \frac{k-1}{2})$ y $\alpha'(\hat{\lambda}) = 0$, luego

$$\alpha'(\lambda) \begin{cases} > 0, & 0 < \lambda < \hat{\lambda}, \\ < 0, & \hat{\lambda} < \lambda, \end{cases}$$

así, tanto $A(\lambda)$ como $\alpha(\lambda)$ alcanza su valor máximo en $\hat{\lambda}$. Dado que $\hat{\lambda}$ es la raíz positiva de $-2\lambda^2 - 4\lambda + k - 1 = 0$, se cumple entonces $k - 1 - 2\hat{\lambda} = 2\hat{\lambda}(1 + \hat{\lambda})$ y

$$A(\hat{\lambda}) = \frac{\hat{\lambda}(k - 2\hat{\lambda} - 1)}{k(1 + \hat{\lambda})} = \frac{2\hat{\lambda}^2(1 + \hat{\lambda})}{k(1 + \hat{\lambda})} = \frac{2\hat{\lambda}^2}{k} = \mathcal{M}, \quad \mathcal{M} = \frac{(\sqrt{k+1} - \sqrt{2})^2}{k}.$$

En consecuencia, $\alpha(\lambda)$ también alcanza su valor máximo en $\hat{\lambda}$ con

$$\alpha(\hat{\lambda}) = \frac{1}{2} \left[\mathcal{M} - (d_1 + d_2) \left(\frac{n^2}{\ell^2} + \frac{m^2}{\ell^2} \right) \right].$$

Finalmente, si para algún $\lambda^* \in (0, \frac{k-1}{2}]$ se satisface la condición $(\mathbf{H}_1)$, entonces $\alpha(\lambda^*) = 0$ y

$$\alpha'(\lambda^*) \begin{cases} > 0, & 0 < \lambda^* < \hat{\lambda}, \\ < 0, & \hat{\lambda} < \lambda^* \leq (k-1)/2. \end{cases}$$

Observe que para todo $\lambda^* \neq \hat{\lambda}$ cumple (17).

Cuando $\hat{\lambda} < \lambda^* < (k-1)/2$, la parte real de un par de autovalores complejos de $L(\lambda)$ se vuelve positiva al disminuir λ al cruzar λ^* . En cambio, si $0 < \lambda^* < \hat{\lambda}$, dicha parte real se vuelve negativa cuando λ disminuye al cruzar λ^* . Esto significa que, en el intervalo $(\hat{\lambda}, \frac{k-1}{2})$, el estado estacionario constante pierde estabilidad al cruzar un punto de bifurcación al decrecer λ , mientras que en $(0, \hat{\lambda})$ la estabilidad se recupera bajo el mismo cambio de parámetro. A partir de esta discusión, la determinación de los puntos de bifurcación de Hopf se reduce a describir el conjunto

$$\Lambda := \left\{ \lambda \in \left(0, \frac{k-1}{2} \right) \setminus \{\hat{\lambda}\} : \text{existe } n, m \in \mathbb{N}_0 \text{ que satisface (16)} \right\},$$

donde los parámetros $(\ell, d_1, d_2, \theta, k)$ son dados. En adelante, fijamos $d_1, d_2, \theta > 0$ y $k > 1$, y permitimos elegir ℓ convenientemente.

El punto $\lambda_H^* = (k-1)/2$ pertenece a Λ para cualquier $\ell > 0$, ya que

$$T_{0,0}(\lambda_H^*) = 0, \quad T_{j,k}(\lambda_H^*) \neq 0 (< 0) \quad \text{para todo } j, k \in \mathbb{N}_0, \quad j^2 + k^2 \neq 0,$$

y además $D_{j,k}(\lambda_H^*) > 0$ para todo $j, k \in \mathbb{N}_0$. Este valor corresponde a la clásica bifurcación de Hopf asociada a la solución periódica espacialmente homogénea, conocida del análisis del sistema ODE. En particular, λ_H^* es el único valor de bifurcación de Hopf para soluciones homogéneas para cualquier $\ell > 0$.

Para las bifurcaciones de Hopf espacialmente no homogéneas para cada $(n, m) \in \mathbb{N}_0^2$, se comienza por observar que $A(0) = A(\lambda_H^*) = 0$, $A(\lambda) > 0$ en $(0, \lambda_H^*)$ y $A(\lambda)$ posee un único punto crítico en $\lambda = \hat{\lambda} \in (0, \frac{k-1}{2})$ donde alcanza el máximo local

$$A(\hat{\lambda}) = \frac{2\hat{\lambda}^2}{k} = \mathcal{M} = \frac{(\sqrt{k+1} - \sqrt{2})^2}{k}.$$

En el plano λ - y , la curva $y = A(\lambda)$ corta a la recta

$$y = (d_1 + d_2) \left(\frac{n^2}{\ell^2} + \frac{m^2}{\ell^2} \right)$$

en dos puntos dentro del intervalo $(0, \frac{k-1}{2})$, a saber $\lambda_{n,m}^+$ y $\lambda_{n,m}^-$, siempre que

$$(d_1 + d_2) \left(\frac{n^2}{\ell^2} + \frac{m^2}{\ell^2} \right) < \mathcal{M}.$$

Sea

$$\ell_c = \sqrt{\frac{d_1 + d_2}{\mathcal{M}}} = \frac{\sqrt{k(d_1 + d_2)}}{\sqrt{k+1} - \sqrt{2}}.$$

Si $\ell \leq \ell_c$, entonces el único punto de bifurcación de Hopf es λ_H^* .

Si $\ell > \ell_c$, existen valores $\lambda_{j,k}^+$ y $\lambda_{j,k}^-$, con $(j, k) \in \mathbb{N}_0^2$ y $1 \leq j^2 + k^2 \leq n^2 + m^2$,

donde $n^2 + m^2$ es el mayor entero estrictamente menor que $(\ell/\ell_c)^2$, tales que para cada $(s, t), (j, k) \in \mathbb{N}_0^2$ con $1 \leq s^2 + t^2 < j^2 + k^2 \leq n^2 + m^2$ se cumple:

$$0 < \lambda_{s,t}^- < \lambda_{j,k}^- < \widehat{\lambda} < \lambda_{j,k}^+ < \lambda_{s,t}^+ < \lambda_H^*.$$

y

$$T_{j,k}(\lambda_{j,k}^\pm) = 0, \quad T_{s,t}(\lambda_{j,k}^\pm) \neq 0.$$

Dado que $D_{n,m} > 0$ en $[0, \frac{k-1}{2}]$, puesto que

$$D_{n,m}(\lambda) = \frac{\theta(k-\lambda)}{k(1+\lambda)} - d_2 A(\lambda) \left(\frac{n^2}{\ell^2} + \frac{m^2}{\ell^2} \right) + d_1 d_2 \left(\frac{n^2}{\ell^2} + \frac{m^2}{\ell^2} \right)^2,$$

en $[0, \frac{k-1}{2}]$ se tiene $\frac{k-\lambda}{1+\lambda} \geq 1$ y $A(\lambda) \leq \mathcal{M}$, por tanto

$$D_{n,m}(\lambda) \geq \frac{\theta}{k} - d_2 \mathcal{M} \left(\frac{n^2}{\ell^2} + \frac{m^2}{\ell^2} \right) + d_1 d_2 \left(\frac{n^2}{\ell^2} + \frac{m^2}{\ell^2} \right)^2.$$

esta expresión se puede ver como una parábola con respecto $\left(\frac{n^2}{\ell^2} + \frac{m^2}{\ell^2} \right)$, y es positiva si su discriminante es negativo, esto es,

$$(d_2 \mathcal{M})^2 - 4d_1 d_2 \frac{\theta}{k} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d_1}{d_2} > \frac{(\sqrt{k+1} - \sqrt{2})^4}{4\theta k}.$$

De este análisis se obtiene el siguiente resultado.

Teorema. Supongamos que $d_1, d_2, \theta > 0$ y $k > 1$ satisfacen

$$\frac{d_1}{d_2} > \frac{(\sqrt{k+1} - \sqrt{2})^4}{4\theta k}.$$

y sea

$$\ell_c = \frac{\sqrt{k(d_1 + d_2)}}{\sqrt{k+1} - \sqrt{2}}.$$

Si $\ell > \ell_c$, existen valores $\lambda_{j,k}^+$ y $\lambda_{j,k}^-$ en $(0, \frac{k-1}{2})$ con $(j, k) \in \mathbb{N}_0^2$ y $1 \leq j^2 + k^2 \leq n^2 + m^2$, donde $n^2 + m^2$ es el mayor entero estrictamente menor que $(\ell/\ell_c)^2$, tales que para cada $(s, t), (j, k) \in \mathbb{N}_0^2$ con $1 \leq s^2 + t^2 < j^2 + k^2 \leq n^2 + m^2$ se cumple:

$$0 < \lambda_{s,t}^- < \lambda_{j,k}^- < \widehat{\lambda} < \lambda_{j,k}^+ < \lambda_{s,t}^+ < \lambda_H^*,$$

$$T_{j,k}(\lambda_{j,k}^\pm) = 0, \quad T_{s,t}(\lambda_{j,k}^\pm) \neq 0 \quad \text{y} \quad D_{j,k}(\lambda_{j,k}^\pm) > 0, \quad D_{s,t}(\lambda_{j,k}^\pm) \neq 0.$$

Con los resultados obtenidos y teniendo en cuenta la transversalidad: $\alpha'_{j,k}(\lambda_{j,k}^\pm) \neq 0$, se concluye que nuestro modelo admite bifurcación de Hopf.

En forma general, el sistema (8) puede escribirse:

$$\frac{dU}{dt} = L(\lambda^*)U + F_{\lambda^*}(U) \tag{18}$$

donde

$$L(\lambda^*) = \begin{pmatrix} d_1\Delta + A(\lambda^*) & B(\lambda^*) \\ C(\lambda^*) & d_2\Delta + D(\lambda^*) \end{pmatrix},$$

$$F_{\lambda^*}(U) = \begin{pmatrix} f(\lambda^*, u, v) - A(\lambda^*)u - B(\lambda^*)v \\ g(\lambda^*, u, v) - C(\lambda^*)u - D(\lambda^*)v \end{pmatrix}; \quad U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

El operador adjunto de $L(\lambda^*)$ es:

$$L^*(\lambda^*) := \begin{pmatrix} d_1\Delta + A(\lambda^*) & C(\lambda^*) \\ B(\lambda^*) & d_2\Delta + D(\lambda^*) \end{pmatrix},$$

esto es, $\langle U, L(\lambda^*)V \rangle = \langle L^*(\lambda^*)U, V \rangle; \forall U, V \text{ en } X$, donde

$$\langle U, V \rangle = \int_0^{\ell\pi} \int_0^{\ell\pi} (\bar{u}_1 v_1 + \bar{u}_2 v_2) dx dy.$$

Con $\lambda^* = \lambda_{n,m}^*$ y teniendo en cuenta:

1. $q = \cos\left(\frac{nx}{\ell}\right) \cos\left(\frac{my}{\ell}\right) \begin{pmatrix} a_{nm} \\ b_{nm} \end{pmatrix}$ es auto-función de $L(\lambda^*)$ asociada a $i\omega_{n,m}(\lambda^*) = i\omega_0$ y
 $q^* = \cos\left(\frac{nx}{\ell}\right) \cos\left(\frac{my}{\ell}\right) \begin{pmatrix} a_{nm}^* \\ b_{nm}^* \end{pmatrix}$ es auto-función de $L^*(\lambda^*)$ asociada a $-i\omega_{n,m}(\lambda^*) = -i\omega_0$.
2. $\langle q^*, q \rangle = 1$ y $\langle q^*, \bar{q} \rangle = 0$, con $a_{n,m}, a_{n,m}^*, b_{n,m}, b_{n,m}^* \in \mathbb{C}$.
3. $X = X^c \oplus X^s$, es la descomposición de X donde

$$X^c := \{zq + \bar{z}\bar{q} : z \in \mathbb{C}\}; \quad X^s := \{r \in X : \langle q^*, r \rangle = 0\},$$

$$U = zq + \bar{z}\bar{q} + r, \quad \langle q^*, U \rangle = z, \quad r = U - \langle q^*, U \rangle q - \langle \bar{q}^*, U \rangle \bar{q}$$

entonces el sistema (18) se transforma en

$$\begin{cases} \frac{dz}{dt} = i\omega_0 z + \langle q^*, F_{\lambda^*}(U) \rangle \\ \frac{dr}{dt} = L(\lambda^*)r + H(z, \bar{z}, r). \end{cases} \quad (19)$$

donde

$$H(z, \bar{z}, r) = F_{\lambda^*}(U) - \langle q^*, F_{\lambda^*}(U) \rangle q - \langle \bar{q}^*, F_{\lambda^*}(U) \rangle \bar{q}$$

y

$$F_{\lambda^*}(U) = F_{\lambda^*}(zq + \bar{z}\bar{q} + r).$$

Supongamos que la función $F_{\lambda^*}(U) = F(\lambda^*, U)$ se puede escribir como

$$F_{\lambda^*}(U) = \frac{1}{2}\mathbf{B}(U, U) + \frac{1}{6}\mathbf{C}(U, U, U) + o(\|U\|^4),$$

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(q, q) &= \mathbf{B}_{qq} = \cos^2\left(\frac{nx}{\ell}\right) \cos^2\left(\frac{my}{\ell}\right) \begin{pmatrix} c_{nm} \\ d_{nm} \end{pmatrix} \\ \mathbf{B}(q, \bar{q}) &= \mathbf{B}_{q\bar{q}} = \cos^2\left(\frac{nx}{\ell}\right) \cos^2\left(\frac{my}{\ell}\right) \begin{pmatrix} e_{nm} \\ f_{nm} \end{pmatrix} \\ \mathbf{C}(q, q, \bar{q}) &= \mathbf{C}_{qq\bar{q}} = \cos^3\left(\frac{nx}{\ell}\right) \cos^3\left(\frac{my}{\ell}\right) \begin{pmatrix} g_{nm} \\ h_{nm} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
c_{nm} &= f_{uu}a_{nm}^2 + 2f_{uv}a_{nm}b_{nm} + f_{vv}b_{nm}^2 \\
d_{nm} &= g_{uu}a_{nm}^2 + 2g_{uv}a_{nm}b_{nm} + g_{vv}b_{nm}^2 \\
e_{nm} &= f_{uu}|a_{nm}|^2 + f_{uv}(a_{nm}\bar{b}_{nm} + \bar{a}_{nm}b_{nm}) + f_{vv}|b_{nm}|^2 \\
f_{nm} &= g_{uu}|a_{nm}|^2 + g_{uv}(a_{nm}\bar{b}_{nm} + \bar{a}_{nm}b_{nm}) + g_{vv}|b_{nm}|^2 \\
g_{nm} &= f_{uuu}|a_{nm}|^2 a_n + f_{uvv}(2|a_{nm}|^2 b_n + a_{nm}^2 \bar{b}_{nm}) \\
&\quad + f_{uvv}(2|b_{nm}|^2 a_{nm} + b_{nm}^2 \bar{a}_{nm}) + f_{vvv}|b_{nm}|^2 b_{nm} \\
h_{nm} &= g_{uuu}|a_{nm}|^2 a_{nm} + g_{uvv}(2|a_{nm}|^2 b_{nm} + a_{nm}^2 \bar{b}_{nm}) \\
&\quad + g_{uvv}(2|b_{nm}|^2 a_{nm} + b_{nm}^2 \bar{a}_{nm}) + g_{vvv}|b_{nm}|^2 b_{nm}
\end{aligned}$$

y

$$\begin{cases} H_{20} = B_{qq} - \langle q^*, B_{qq} \rangle q - \langle \bar{q}^*, B_{qq} \rangle \bar{q}, \\ H_{11} = B_{q\bar{q}} - \langle q^*, B_{q\bar{q}} \rangle q - \langle \bar{q}^*, B_{q\bar{q}} \rangle \bar{q}, \\ H_{02} = B_{\bar{q}\bar{q}} - \langle q^*, B_{\bar{q}\bar{q}} \rangle q - \langle \bar{q}^*, B_{\bar{q}\bar{q}} \rangle \bar{q}. \end{cases}$$

El sistema (19) posee una variedad central en $\mathbf{0}$:

$$W^c(\mathbf{0}) = \{(z, \bar{z}, r) : r = V(z, \bar{z})\},$$

y teniendo en cuenta la segunda en la ecuación (19),

$$\begin{cases} (L(\lambda^*) - 2i\omega_0 I) r_{20} = -H_{20} \\ L(\lambda^*) r_{11} = -H_{11} \\ (L(\lambda^*) + 2i\omega_0 I) r_{02} = -H_{02} \end{cases}$$

Del desarrollo de Taylor de la primera ecuación de (19) se calcula el coeficiente que acompaña el término cubico de $z^2 \bar{z}$, llamado coeficiente de Liapunov.

$$\begin{aligned}
\text{Re}(c_1(\lambda_H^*)) &= \text{Re}\left\{\frac{i}{2\omega_0} \langle q^*, \mathbf{B}_{qq} \rangle \cdot \langle q^*, \mathbf{B}_{q\bar{q}} \rangle + \frac{1}{2} \langle \bar{q}^*, \mathbf{C}_{qq\bar{q}} \rangle\right\} \\
&= -\frac{2}{k(k+1)} < 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Re}(c_1(\lambda^*)) &= \text{Re}\langle p, B_{r_{20}q} \rangle + \frac{1}{2}\text{Re}\langle p, B_{r_{11}\bar{q}} \rangle + \frac{1}{2}\text{Re}\langle p, C_{qq\bar{q}} \rangle \\
&= \frac{1}{8} \left[(\xi_{1R} + 2\eta_{1R} + 2\tau_{1R} + 4\chi_{1R}) \left(f_{uu} + f_{uv} \frac{2d_2|\mathbf{n}|^2}{\ell^2\theta} + g_{uv} \right) \right] \\
&\quad + \frac{1}{8} \left[(\xi_{1I} + 2\eta_{1I} + 2\tau_{1I} + 4\chi_{1I}) \left(f_{uu} \frac{d_2|\mathbf{n}|^2}{\omega_0\ell^2} - f_{uv} \left(\frac{\omega_0}{\theta} - \frac{d_2^2|\mathbf{n}|^4}{\theta\omega_0\ell^4} \right) - g_{uu} \frac{\theta}{\omega_0} - g_{uv} \frac{d_2|\mathbf{n}|^2}{\ell^2\omega_0} \right) \right] \\
&\quad + \frac{1}{8} \left[f_{uv} (\xi_{2R} + 2\eta_{2R} + 2\tau_{2R} + 4\chi_{2R}) + (\xi_{2I} + 2\eta_{2I} + 2\tau_{2I} + 4\chi_{2I}) \left(f_{uv} \frac{d_2|\mathbf{n}|^2}{\omega_0\ell^2} - g_{uv} \frac{\theta}{\omega_0} \right) \right] \\
&\quad + \frac{1}{16} \left[\left(\tilde{\xi}_1 + 2\tilde{\eta}_1 + 2\tilde{\tau}_1 + 4\tilde{\chi}_1 \right) \left(f_{uu} + f_{uv} \frac{2d_2|\mathbf{n}|^2}{\ell^2\theta} - g_{uv} \right) \right] \\
&\quad + \frac{1}{16} \left[\left(\tilde{\xi}_2 + 2\tilde{\eta}_2 + 2\tilde{\tau}_2 + 4\tilde{\chi}_2 \right) f_{uv} \right] + \frac{9}{64} \left[f_{uuu} + 2 \frac{d_2|\mathbf{n}|^2}{\ell^2\theta} f_{uvv} + g_{uvv} \right]
\end{aligned}$$

donde los cálculos de las variables

$$\xi_{1R}, \xi_{1I}, \xi_{2R}, \xi_{2I}, \eta_{1R}, \eta_{1I}, \eta_{2R}, \eta_{2I}, \tau_{1R}, \tau_{1I}, \tau_{2R}, \tau_{2I}, \eta_{1R}, \eta_{1I}, \eta_{2R}, \eta_{2I}, \chi_{1R}, \chi_{1I}, \chi_{2R}, \chi_{2I}, \tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2, \tilde{\eta}_1, \tilde{\eta}_2, \tilde{\tau}_1, \tilde{\tau}_2, \tilde{\chi}_1, \tilde{\chi}_2,$$

se encuentran en el extenso.

La bifurcación de Hopf es supercrítica si

$$\frac{1}{\alpha'_{j,k}(\lambda_{j,k}^\pm)} \text{Re}(c_1(\lambda_{j,k}^\pm)) < 0.$$

La bifurcación de Hopf es subcrítica si

$$\frac{1}{\alpha'_{j,k}(\lambda_{j,k}^{\pm})} \text{Re}(c_1(\lambda_{j,k}^{\pm})) > 0.$$

Simulación numérica

Utilizamos varias simulaciones numéricas para ilustrar y complementar nuestros resultados analíticos. Las simulaciones se generan mediante el solucionador **pdepe** de Matlab, el cual resuelve problemas de valor inicial y de frontera para ecuaciones diferenciales parciales parabólico-elípticas en una dimensión espacial. Hemos identificado valores críticos de los parámetros para el sistema (3), en particular, $\lambda^* = \lambda_H^* = \frac{k-1}{2}$. Este es el primer punto de bifurcación de Hopf.

Para el caso $\mathbf{n} = \mathbf{0}$, los resultados coinciden con los correspondientes al sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) asociado al modelo (3). Esta versión del sistema (4) involucra tres parámetros: k , m y θ . En primer lugar, elegimos los parámetros $k = 3$, $m = 1.2$, $\theta = 0.6$, los cuales producen $\lambda = \frac{\theta}{m-\theta} = 1$. En este caso, el valor de bifurcación de Hopf es $\lambda_H^* = \frac{k-1}{2} = 1$. La solución de equilibrio $E(\lambda, v_\lambda)$ es localmente asintóticamente estable.

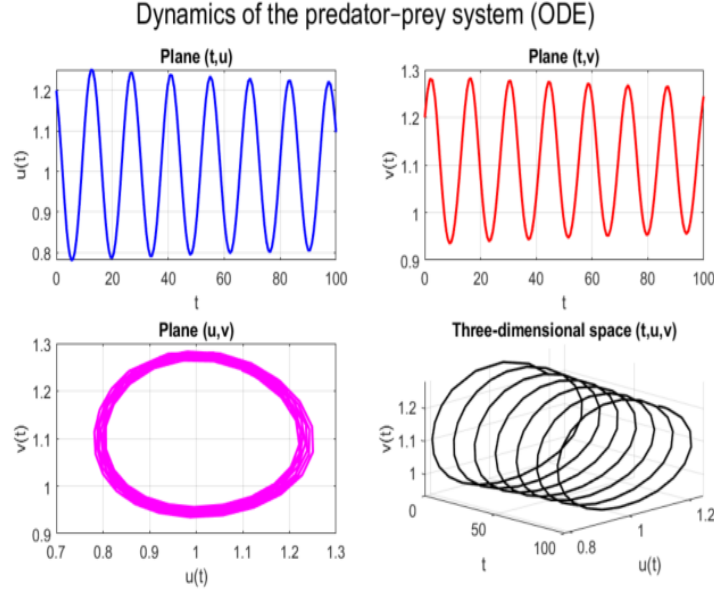


Figure 1: Simulación numérica de la versión EDO del sistema (4). Se consideran los parámetros $k = 3$, $m = 1.2$ y $\theta = 0.6$, con condición inicial $(u(0), v(0)) = (1.2, 1.2)$. La solución de equilibrio $E(1, 1.1)$ es asintóticamente estable.

Ahora, al considerar el caso $\mathbf{n} = (n, 0)$, los resultados obtenidos para los sistemas (3) o (5) coinciden con los reportados en [3], tanto para $n \neq 0$ como para $n = 0$, en el dominio espacial dado por el segmento de recta $\Omega = (0, \ell\pi)$. De manera similar, para el caso $\mathbf{n} = (0, m)$, también se obtienen resultados análogos a los presentados en [3].

Por otra parte, nuestro modelo de EDP (3) o (5) involucra los parámetros k , θ , m , d_1 , d_2 , ℓ . Es posible elegir el parámetro de longitud ℓ de tal forma que ocurran varios puntos de bifurcación estacionaria asociados a valores críticos λ^* que satisfacen $\lambda^* \in (0, \frac{k-1}{2}]$. Si $n = 1$ y escogemos $\ell = 4.2$, junto con los valores de los parámetros $k = 3$, $m = 2.22$, $\theta = 0.6$, $d_1 = d_2 = 1$, entonces obtenemos $\lambda = \lambda^* = 0.36$.

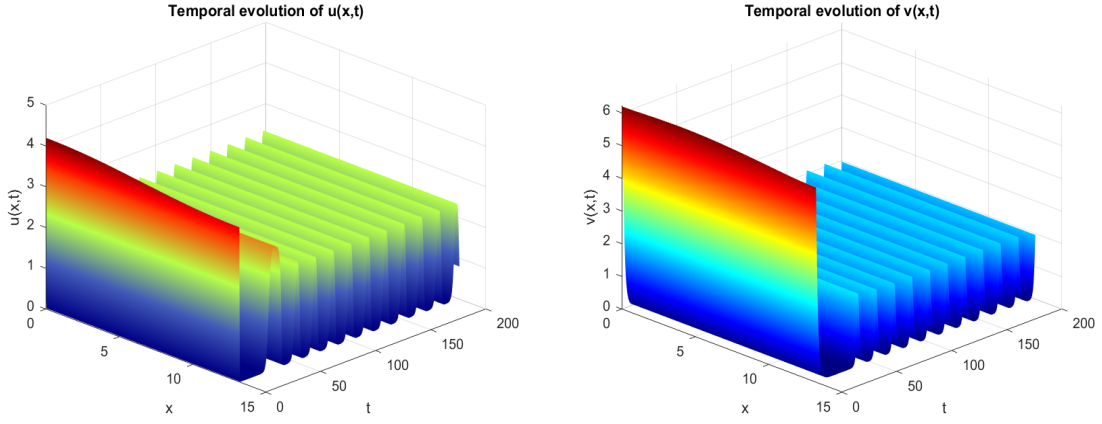


Figure 2: Simulación numérica del sistema (3) o (5): (izquierda) $u(x, t)$; (derecha) $v(x, t)$. Parámetros: $(n, m) = (1, 0)$, $\ell = 4.2$, $k = 3$, $d_1 = d_2 = 1$, $m = 2.22$ y $\theta = 0.6$. Condición inicial: $(u_0(x), v_0(x)) = (4 + 0.2 \cos(\frac{\pi x}{\ell \pi}), 3 + 0.2 \sin(\frac{\pi x}{\ell \pi}))$. El punto de equilibrio espacialmente no homogéneo es $E = (0.36, 0.54)$.

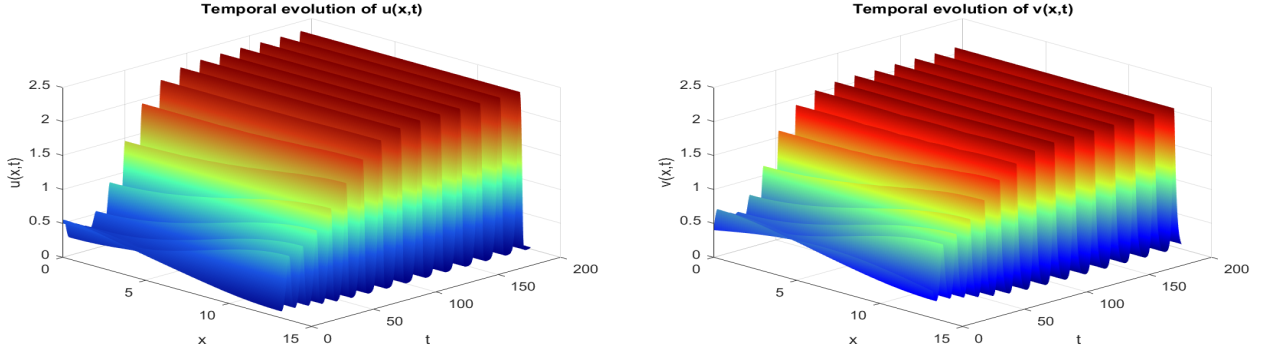


Figure 3: Simulación numérica del sistema (3) o (5): (izquierda) $u(x, t)$; (derecha) $v(x, t)$. Parámetros: $(n, m) = (1, 0)$, $\ell = 4.2$, $k = 3$, $d_1 = d_2 = 1$, $m = 2.22$ y $\theta = 0.6$. Condición inicial: $(u_0(x), v_0(x)) = (0.4 + 0.2 \cos(\frac{\pi x}{\ell \pi}), 0.3 + 0.2 \sin(\frac{\pi x}{\ell \pi}))$. El equilibrio espacialmente no homogéneo $E = (0.36, 0.54)$ es asintóticamente inestable.

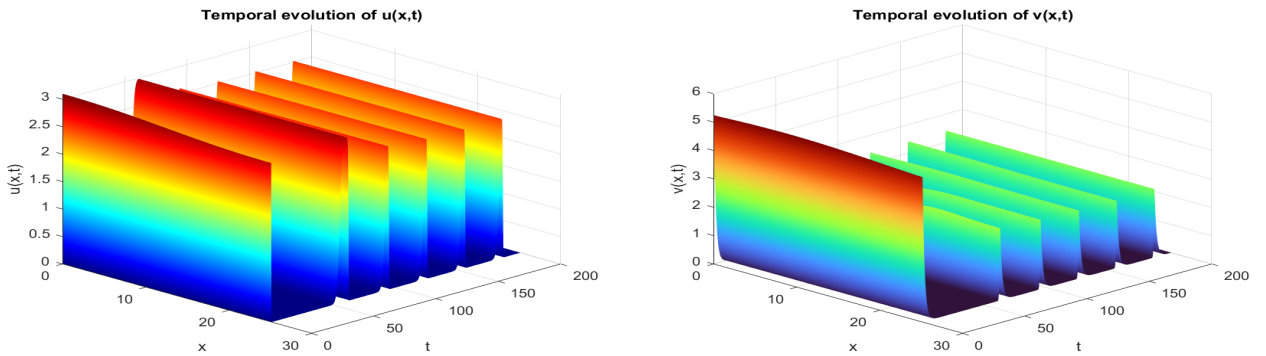


Figure 4: Simulación numérica del sistema (3) o (5): (izquierda) $u(x, t)$; (derecha) $v(x, t)$. Parámetros: $(n, m) = (1, 1)$, $\ell = 8$, $k = 3$, $d_1 = d_2 = 1$, $m = 5.63$ y $\theta = 0.6$. Condición inicial: $(u_0(x), v_0(x)) = (3 + 0.2 \cos(\frac{\pi x}{\ell \pi}), 3 + 0.2 \sin(\frac{\pi x}{\ell \pi}))$. El punto de equilibrio espacialmente no homogéneo es $E = (0.11, 0.19)$.

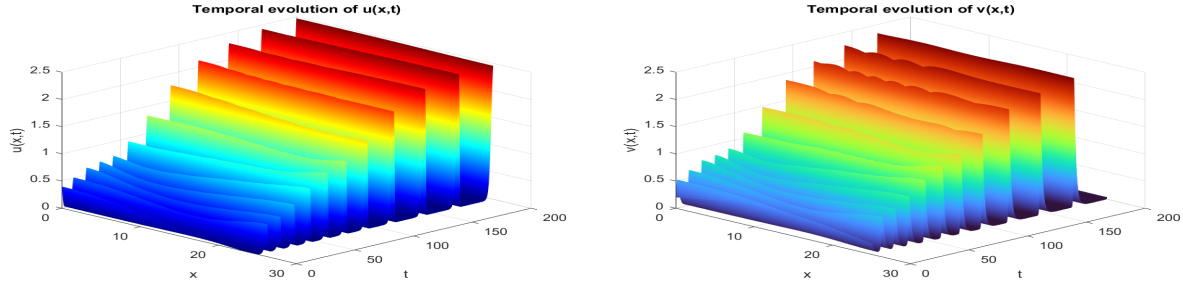


Figure 5: Simulación numérica del sistema (3) o (5): (izquierda) $u(x, t)$; (derecha) $v(x, t)$. Parámetros: $(n, m) = (1, 1)$, $\ell = 8$, $k = 3$, $d_1 = d_2 = 1$, $m = 5.63$ y $\theta = 0.6$. Condición inicial: $(u_0(x), v_0(x)) = (0.2 + 0.2 \cos(\frac{\pi x}{\ell \pi}), 0.2 + 0.2 \sin(\frac{\pi x}{\ell \pi}))$. El equilibrio espacialmente no homogéneo $E = (0.11, 0.19)$ es asintóticamente inestable.

References

- [1] Y.-H. Du and Y. Lou, *S-shaped global bifurcation curve and Hopf bifurcation of positive solutions to a predator-prey model*. J. Differential Equations 144 (1998), no. 2, 390–440.
- [2] B.D Hassard, N.D Kazarinoff, Y.H Wan *Theory and Application of Hopf Bifurcation*. Cambridge Univ. Press, Cambridge, (1981).
- [3] F. Yi, J. Wei and J. shi. *Bifurcation and Spatitemporal Patterns in a Homogeneous Diffusive predator-prey system*. Journal of Differential Equations, Vol. 246, pp. 1944-1977, (2009).
- [4] J. D. Ferreira, A. González and W. Molina, *Lyapunov coefficients for degenerate Hopf bifurcations and an application in a model of competing populations*. Journal of Mathematical Analysis and Applications & Vol. 455, pp 1-51, (2017).
- [5] Ruan, S.-G. (1998). *Diffusion-driven instability in the Gierer–Meinhardt model of morphogenesis*. Natur. Resource Modeling, 11(1998), no 2, 131–142.
- [6] W. Ko and K. Ryu *A qualitative study on general Gause-type predator-prey models with constant diffusion rates*. J. Math. Anal. and Appl. Vol. 344 pp 217-230, (2008).
- [7] F.-Q. Yi, J.-J. Wei and J.-P. Shi, *Diffusion-driven instability and bifurcation in the Lengyel-Epstein System*. Nonl. Anal: Real World Appl. 9 (2008), no. 3, 1038-1051.
- [8] F.-Q. Yi, J.-J. Wei and J.-P. Shi, *Global asymptotical behavior of the Lengyel-Epstein reaction-diffusion system*. To appear in Appl. Math. Lett., (2008).
- [9] Y. A. Kuznetsov, *Elements of applied Bifurcation theory*. Springer-Verlag, (1998).
- [10] Levin, S.A. and Stewart, F.M. and Chao, L., *Resource-limited growth, competition, and predation: a model and experimental studies with bacteria and bacteriophage*. Science Vol. 196 (1977), No. 42962, pp. 1071-1077.
- [11] Holling, C.S., *The Components of Predation as Revealed by a Study of Small-Mammal Predation of the European Pine Sawfly*. The Canadian Entomologist Vol. 91 (1959), No. 5, pp. 293-320.
- [12] Murray, J.D., *Mathematical Biology II: Spatial Models and Biomedical Applications*. Springer-Verlag Third Edition. (2003).
- [13] Medvinsky, A.B. and Petrovskii, S.V. and Tikhonova, I.A. and Malchow, H. and Li, B.L., *Spatiotemporal complexity of plankton and fish dynamics*. Chaos, Solitons & Fractals Vol. 12 (2001), No. 2, pp. 261-276.
- [14] Petrovskii, S.V. and Malchow, H. *Critical phenomena in plankton communities: KISS model revisited*. Theoretical Population Biology Vol. 59 (2001), No. 2, pp. 157-174.
- [15] S.-B. Hsu, *A survey of constructing Lyapunov functions for mathematical models in population biology*, Taiwanese Journal of Mathematics, 9(2) (2005), 151-173.

- [16] A. Ardito, P. Ricciardi, Lyapunov functions for a generalized Gause-type model, *Journal of Mathematical Biology*, **33**(8) (1995), 816-828.