



Una Acreditación con
Rostro Humano

Hacia una
Universidad
comprometida
con la paz
territorial

XIV CONGRESO DE LA SOCIEDAD LATIOAMERICANA DE BIOLOGÍA MATEMÁTICA



Universidad
del Cauca

Facultad Politécnica de la Universidad Nacional
de Asunción (FP-UNA), San Lorenzo, Paraguay.



Jhon Jairo Pérez; Wilmer Molina; Alex Manuel Montes.
jjperez@unicauca.edu.co - wilimoliny@unicauca.edu.co -
amontes@unicauca.edu.co

Octubre de 2026



Universidad
del Cauca

Análisis de estabilidad y bifurcación de Hopf en un sistema difusivo presa-predador, con respuesta funcional de Holling tipo II en un dominio espacio-temporal rectangular.

CONTENIDO



Universidad
del Cauca

- ▶ Presentación del modelo.
- ▶ Estudio del modelo.
- ▶ Conclusiones.
- ▶ Bibliografía.



Universidad
del Cauca

(1)

Presentación del modelo

$$\begin{aligned} N_t &= d_1 \Delta N + N \left(1 - \frac{N}{k} \right) - \frac{aNP}{N+1}, & (x, y) \in \Omega, t > 0, \\ P_t &= d_2 \Delta P + P \left(-\theta + \frac{aNP}{N+1} \right), & (x, y) \in \Omega, t > 0, \end{aligned}$$

Con condiciones iniciales:

$$N(x, y, 0) = N_0(x, y) > 0, \quad P(x, y, 0) = P_0(x, y) > 0, \quad (x, y) \in \Omega,$$

y con condiciones de frontera:

$$\frac{\partial N}{\partial \nu} = \frac{\partial P}{\partial \nu} = 0, \quad (x, y) \in \partial\Omega, t > 0.$$

donde ν es el vector normal exterior a la frontera de

$\Omega = (0, \pi\ell) \times (0, \pi\ell)$, $\ell > 0$. Aquí, $k, \theta, a, d_1, d_2 \in \mathbb{R}_+$; k representa la capacidad de carga reescalada, θ la tasa de mortalidad del depredador, a la intensidad de interacción entre especies, d_1 y d_2 coeficientes de difusión de las presas y depredadores respectivamente.



Linealización de un sistema reacción-difusión general

$$\begin{cases} N_t = d_1 \Delta N + f(\lambda, N, P) \\ P_t = d_2 \Delta P + g(\lambda, N, P). \end{cases} \quad (2)$$

La linealización de (2) en el punto de equilibrio $(\lambda, 0, 0)$.

$$\begin{cases} N_t = d_1 \Delta N + f(\lambda, 0, 0) + \nabla f(\lambda, 0, 0)(N, P) + R_1(N, P) \\ P_t = d_2 \Delta P + g(\lambda, 0, 0) + \nabla g(\lambda, 0, 0)(N, P) + R_2(N, P) \end{cases}$$

$$U_t = L(\lambda) U, \quad U = \begin{pmatrix} N \\ P \end{pmatrix}. \quad (3)$$



Universidad
del Cauca

Linealización de un sistema reacción-difusión general

donde

$$L(\lambda) = \begin{pmatrix} d_1 \Delta + A(\lambda) & B(\lambda) \\ C(\lambda) & d_2 \Delta + D(\lambda) \end{pmatrix}.$$

$$A(\lambda) = f_N(\lambda, 0, 0), \quad B(\lambda) = f_P(\lambda, 0, 0)$$

$$C(\lambda) = g_N(\lambda, 0, 0), \quad D(\lambda) = g_P(\lambda, 0, 0)$$



Problema de valor de frontera

$$\begin{cases} -\Delta\varphi = \mu\varphi; & \mathbf{x} = (x, y) \in \Omega, \\ \frac{\partial\varphi}{\partial\eta}(\mathbf{x}) = \nabla\varphi \cdot \eta = 0; & \mathbf{x} \in \partial\Omega. \end{cases}$$

donde $\Omega = (0, \ell\pi) \times (0, \ell\pi)$, $\ell \in \mathbb{R}^+$. Encontrar la solución de (4) es equivalente a encontrar los auto funciones del operador $-\Delta$ con respecto al valor propio μ .

Sucesión de valores y autovalores propias

Para cada $n, m \in \mathbb{N}_0$, $\varphi_{nm}(x, y) = \cos\left(\frac{nx}{\ell}\right) \cos\left(\frac{my}{\ell}\right)$,

$\varphi_{mn}(x, y) = \cos\left(\frac{mx}{\ell}\right) \cos\left(\frac{ny}{\ell}\right)$ son soluciones de (4) con

$$\mu = \frac{n^2}{\ell^2} + \frac{m^2}{\ell^2}.$$



Teniendo en cuenta lo anterior, se obtiene el siguiente resultado:

Teorema. Sean $n, m \in \mathbb{N}_0$. $q = \cos\left(\frac{n}{\ell}x\right) \cos\left(\frac{m}{\ell}y\right) \begin{pmatrix} a_{nm} \\ b_{nm} \end{pmatrix}$ es un auto función de $L(\lambda)$ asociado a un valor propio α , si y sólo si $\begin{pmatrix} a_{nm} \\ b_{nm} \end{pmatrix}$ es un vector propio de $L_{nm}(\lambda)$ asociado al mismo valor propio α , donde

$$L_{nm}(\lambda) := \begin{pmatrix} A(\lambda) - d_1 \left(\frac{n^2}{\ell^2} + \frac{m^2}{\ell^2} \right) & B(\lambda) \\ C(\lambda) & D(\lambda) - d_2 \left(\frac{n^2}{\ell^2} + \frac{m^2}{\ell^2} \right) \end{pmatrix}. \quad (5)$$



Universidad
del Cauca

Puntos de equilibrio del modelo

$E_0(0, 0)$, $E_1(k, 0)$ y el punto de coexistencia $E_2(\lambda, P_\lambda)$, donde

$$\lambda = \frac{\theta}{a - \theta} \quad , \quad P_\lambda = \frac{(k - \lambda)(1 + \lambda)}{ak}.$$

La existencia biológica de E_2 requiere que $0 < \lambda < k$.

E_0 siempre es un punto de silla.

Si $a < \theta$ (equivalentemente, $\lambda < 0$), E_1 es un punto de silla y E_2 no es admisible.

Si $\theta < a < \theta(k + 1)/k$ (equivalentemente, $0 < k < \lambda$), E_1 es localmente asintóticamente estable, mientras E_2 carece de significado biológico, $P_\lambda < 0$.

Si $a > \theta(k + 1)/k$ (equivalentemente $0 < \lambda < k$), E_1 es un punto de silla y E_2 es biológicamente relevante.



Universidad
del Cauca

Puntos de equilibrio del modelo

En lo que sigue, se establecen condiciones que garantizan la estabilidad global de E_1 y E_2 .

Teorema. Si $k \leq \lambda$ (equivalentemente, $a \leq \theta(k+1)/k$), entonces $E_1(k, 0)$ es globalmente asintóticamente estable, esto es, $E_1(k, 0)$ atrae toda solución positiva de (1).

Teorema. Si $0 < k \leq 1$, o bien $k > 1$ con $k - 1 \leq \lambda < k$, entonces $E_2(\lambda, P_\lambda)$ es globalmente asintóticamente estable, esto es, $E_2(\lambda, P_\lambda)$ atrae toda solución positiva de (1).

Debido a la estabilidad global establecida en el teorema anterior, de aquí en adelante asumimos que $k > 1$ y restringimos el análisis al intervalo $0 < \lambda < k - 1$.



Punto de equilibrio $E_2(\lambda, P_\lambda)$

Ahora para analizar la ocurrencia de la bifurcación de Hopf en $E_2(\lambda, P_\lambda)$, introducimos el cambio de variables $\hat{N} = N - \lambda$, $\hat{P} = P - P_\lambda$ y, por simplicidad, seguimos denotando las nuevas variables por N y P . Entonces, el sistema (1) se transforma en

$$\begin{cases} N_t = d_1 \Delta N + f(N, P) & (x, y) \in \Omega, t > 0, \\ P_t = d_2 \Delta P + g(N, P) & (x, y) \in \Omega, t > 0, \end{cases} \quad (6)$$



Universidad
del Cauca

Punto de equilibrio $E_2(\lambda, P_\lambda)$

donde

$$f(N, P) = (N + \lambda) \left(1 - \frac{N + \lambda}{k}\right) - \frac{a(N + \lambda)(P + P_\lambda)}{N + \lambda + 1}$$

$$g(N, P) = -\theta(P + P_\lambda) + \frac{a(N + \lambda)(P + P_\lambda)}{N + \lambda + 1},$$

con condiciones iniciales

$$N(x, y, 0) = N_0(x, y) - \lambda, \quad P(x, y, 0) = P_0(x, y) - v_\lambda, \quad (x, y) \in \Omega,$$

y con condiciones de frontera

$$\frac{\partial N}{\partial \eta} = \frac{\partial P}{\partial \eta} = 0, \quad (x, y) \in \partial\Omega, \quad t > 0.$$



Bifurcación de Hopf

Entonces el sistema Reacción-Difusión (6) nos queda de la forma:

$$\begin{cases} N_t = d_1 \Delta N + f(\lambda, N, P), \\ P_t = d_2 \Delta P + g(\lambda, N, P), \end{cases} \quad (7)$$

su linealización en el punto de equilibrio $(\lambda, 0, 0)$ es dada por:

$$\begin{pmatrix} N_t \\ P_t \end{pmatrix} = L(\lambda) \begin{pmatrix} N \\ P \end{pmatrix}, \quad (8)$$

donde,

$$L(\lambda) = \begin{pmatrix} d_1 \Delta + A(\lambda) & B(\lambda) \\ C(\lambda) & d_2 \Delta + D(\lambda) \end{pmatrix},$$



Universidad
del Cauca

Bifurcación de Hopf

con

$$\begin{aligned}A(\lambda) &= f_N(\lambda, 0, 0) = \frac{\lambda(k - 2\lambda - 1)}{k(1 + \lambda)}, \\B(\lambda) &= f_P(\lambda, 0, 0) = \frac{a\lambda}{1 + \lambda} = -\theta, \\C(\lambda) &= g_N(\lambda, 0, 0) = \frac{k - \lambda}{k(1 + \lambda)}, \\D(\lambda) &= g_P(\lambda, 0, 0) = -\theta + \frac{a\lambda}{1 + \lambda} = 0.\end{aligned}\tag{9}$$



Bifurcación de Hopf

Se define el espacio de soluciones admisibles

$$X := \left\{ (N, P) \in H^2(\Omega) \times H^2(\Omega) : \left(\frac{\partial N}{\partial \nu}, \frac{\partial P}{\partial \nu} \right) = \mathbf{0} \text{ en } \partial\Omega \right\}.$$

La ecuación característica de

$$L_{nm}(\lambda) := \begin{pmatrix} A(\lambda) - d_1 \left(\frac{n^2}{\ell^2} + \frac{m^2}{\ell^2} \right) & B(\lambda) \\ C(\lambda) & D(\lambda) - d_2 \left(\frac{n^2}{\ell^2} + \frac{m^2}{\ell^2} \right) \end{pmatrix}.$$

es:

$$\beta^2 - T_{nm}(\lambda)\beta + D_{nm}(\lambda) = 0; \quad n, m \in \mathbb{N}_0.$$

donde

$$T_{nm}(\lambda) = \text{Tr}(L_{nm}(\lambda)) \quad \text{y} \quad D_{nm}(\lambda) = \det(L_{nm}(\lambda))$$



Universidad
del Cauca

Bifurcación de Hopf

Con valores propios

$$\beta = \frac{T_{nm}(\lambda)}{2} \pm \frac{\sqrt{T_{nm}^2(\lambda) - 4D_{nm}(\lambda)}}{2} = \alpha_{nm}(\lambda) \pm i\omega_{nm}(\lambda),$$

donde

$$\alpha_{nm}(\lambda) = \frac{T_{nm}(\lambda)}{2} \quad ; \quad \omega_{nm}(\lambda) = \sqrt{D_{nm}(\lambda) - \alpha_{nm}^2(\lambda^*)} \quad .$$

Usando los resultados de (9) se sigue

$$T_{nm}(\lambda) = \frac{\lambda(k - 2\lambda - 1)}{k(1 + \lambda)} - (d_1 + d_2) \left(\frac{n^2}{\ell^2} + \frac{m^2}{\ell^2} \right),$$

$$D_{nm}(\lambda) = \frac{\theta(k - \lambda)}{k(1 + \lambda)} - \frac{d_2\lambda(k - 2\lambda - 1)}{k(1 + \lambda)} \left(\frac{n^2}{\ell^2} + \frac{m^2}{\ell^2} \right) + d_1d_2 \left(\frac{n^2}{\ell^2} + \frac{m^2}{\ell^2} \right)^2. \quad (10)$$



Universidad
del Cauca

Bifurcación de Hopf

Con el fin de estudiar la ocurrencia de la bifurcación de Hopf en $\lambda = \lambda^*$, se supone la hipótesis:

(H₁) Existe una vecindad V de $\lambda = \lambda^*$ tal que, para todo $\lambda \in V$, el operador $L(\lambda)$ posee un único par de valores propios complejos conjugados, simples y diferenciables respecto a λ , denotados por $\alpha(\lambda) \pm i\omega(\lambda)$, que satisfacen

$$\alpha(\lambda^*) = 0, \quad \omega(\lambda^*) = \omega_0 > 0, \quad \alpha'(\lambda^*) \neq 0,$$

además, todos los demás valores propios de $L(\lambda)$ tienen parte real no nula.



Universidad
del Cauca

Bifurcación de Hopf

Para nuestro modelo, la hipótesis **(H₁)** es equivalente a la existencia $n, m \in \mathbb{N}_0$ tales que

$$T_{nm}(\lambda^*) = 0, \quad D_{nm}(\lambda^*) > 0, \quad (11)$$

$$T_{ij}(\lambda^*) \neq 0, \quad D_{ij}(\lambda^*) \neq 0 \quad \forall i, j \in \mathbb{N}_0 : i^2 + j^2 \neq n^2 + m^2.$$

y para el único par de valores propios complejos puros se cumple la transversabilidad:

$$\alpha'(\lambda^*) \neq 0. \quad (12)$$



Universidad
del Cauca

Bifurcación de Hopf

Ahora de (10), se tiene que para todo $\lambda \in (\frac{k-1}{2}, k-1)$,

$$T_{nm}(\lambda) < 0 \quad \text{y} \quad D_{nm}(\lambda) > 0.$$

Por consiguiente, el estado estacionario $E_2(\lambda, v_\lambda)$ es localmente asintóticamente estable. En particular, el punto de bifurcación de Hopf λ^* que satisface la condición **(H₁)** debe encontrarse en el intervalo $(0, \frac{k-1}{2}]$. Además,

$$\alpha(\lambda) = \frac{1}{2} \left[A(\lambda) - (d_1 + d_2) \left(\frac{n^2}{\ell^2} + \frac{m^2}{\ell^2} \right) \right], \quad \alpha'(\lambda) = \frac{1}{2} A'(\lambda),$$

y dado que

$$A(\lambda) = \frac{\lambda(k-2\lambda-1)}{k(1+\lambda)}, \quad \text{entonces} \quad A'(\lambda) = \frac{k-1-4\lambda-2\lambda^2}{k(1+\lambda)^2}.$$



Bifurcación de Hopf

Para determinar el signo de $A'(\lambda)$, se analiza el polinomio

$$\varphi(\lambda) = -2\lambda^2 - 4\lambda + k - 1,$$

cuyas raíces están dadas por

$$\lambda_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 8(k-1)}}{-4} = -1 \pm \sqrt{\frac{k+1}{2}}.$$

Si se considera

$$\hat{\lambda} = -1 + \sqrt{\frac{k+1}{2}},$$

y dado que $k > 1$, se verifica que $\hat{\lambda} \in (0, \frac{k-1}{2})$ y $\alpha'(\hat{\lambda}) = 0$, luego

$$\alpha'(\lambda) \begin{cases} > 0, & 0 < \lambda < \hat{\lambda}, \\ < 0, & \hat{\lambda} < \lambda. \end{cases}$$



Universidad
del Cauca

Bifurcación de Hopf

Así, tanto $A(\lambda)$ como $\alpha(\lambda)$ alcanza su valor máximo en $\hat{\lambda}$. Dado que $\hat{\lambda}$ es la raíz positiva de $-2\lambda^2 - 4\lambda + k - 1 = 0$, se cumple entonces

$$k - 1 - 2\hat{\lambda} = 2\hat{\lambda}(1 + \hat{\lambda})$$

y por tanto

$$A(\hat{\lambda}) = \frac{\hat{\lambda}(k - 2\hat{\lambda} - 1)}{k(1 + \hat{\lambda})} = \frac{2\hat{\lambda}^2(1 + \hat{\lambda})}{k(1 + \hat{\lambda})} = \frac{2\hat{\lambda}^2}{k} = \mathcal{M}, \quad \mathcal{M} = \frac{(\sqrt{k+1} - \sqrt{2})^2}{k}.$$

$$\alpha(\hat{\lambda}) = \frac{1}{2} \left[\mathcal{M} - (d_1 + d_2) \left(\frac{n^2}{\ell^2} + \frac{m^2}{\ell^2} \right) \right].$$



Universidad
del Cauca

Bifurcación de Hopf

Finalmente, si para algún $\lambda^* \in (0, \frac{k-1}{2}]$ se satisface la condición **(H₁)**, entonces $\alpha(\lambda^*) = 0$ y

$$\alpha'(\lambda^*) \begin{cases} > 0, & 0 < \lambda^* < \hat{\lambda}, \\ < 0, & \hat{\lambda} < \lambda^* \leq (k-1)/2. \end{cases}$$

Observe que para todo $\lambda^* \neq \hat{\lambda}$ cumple la transversabilidad $\alpha'(\lambda^*) \neq 0$.



Bifurcación de Hopf

Cuando $\hat{\lambda} < \lambda^* < (k-1)/2$, la parte real de un par de autovalores complejos de $L(\lambda)$ se vuelve positiva al disminuir λ al cruzar λ^* . En cambio, si $0 < \lambda^* < \hat{\lambda}$, dicha parte real se vuelve negativa cuando λ disminuye al cruzar λ^* . Esto significa que, en el intervalo $(\hat{\lambda}, \frac{k-1}{2})$, el estado estacionario constante pierde estabilidad al cruzar un punto de bifurcación al decrecer λ , mientras que en $(0, \hat{\lambda})$ la estabilidad se recupera bajo el mismo cambio de parámetro. A partir de esta discusión, la determinación de los puntos de bifurcación de Hopf se reduce a describir el conjunto

$$\Lambda := \left\{ \lambda \in \left(0, \frac{k-1}{2} \right] \setminus \{ \hat{\lambda} \} : \text{existe } n, m \in \mathbb{N}_0 \text{ que satisface (11)} \right\},$$

donde los parámetros $(\ell, a, d_1, d_2, \theta, k)$ son dados. En adelante, fijamos $a, d_1, d_2, \theta > 0$ y $k > 1$, y permitimos elegir ℓ convenientemente.



Bifurcación de Hopf

El punto $\lambda_H^* = (k - 1)/2$ pertenece a Λ para cualquier $\ell > 0$, ya que

$$T_{00}(\lambda_H^*) = 0, \quad T_{ij}(\lambda_H^*) \neq 0 (< 0) \quad \text{para todo } i, j \in \mathbb{N}_0, \quad i^2 + j^2 \neq 0,$$

y además $D_{ij}(\lambda_H^*) > 0$ para todo $i, j \in \mathbb{N}_0$. Este valor corresponde a la clásica bifurcación de Hopf asociada a la solución periódica espacialmente homogénea, conocida del análisis del sistema EDO. En particular, λ_H^* es el único valor de bifurcación de Hopf para soluciones homogéneas para cualquier $\ell > 0$.

Para las bifurcaciones de Hopf espacialmente no homogéneas para cada $(n, m) \in \mathbb{N}_0^2$, se comienza por observar que $A(0) = A(\lambda_H^*) = 0$, $A(\lambda) > 0$ en $(0, \lambda_H^*)$ y $A(\lambda)$ posee un único punto crítico en $\lambda = \hat{\lambda} \in (0, \frac{k-1}{2})$ donde alcanza el máximo local

$$A(\hat{\lambda}) = \frac{2\hat{\lambda}^2}{k} = \mathcal{M} = \frac{(\sqrt{k+1} - \sqrt{2})^2}{k}.$$



Universidad
del Cauca

Bifurcación de Hopf

En el plano λ - y , la curva $y = A(\lambda)$ corta a la recta

$$y = (d_1 + d_2) \left(\frac{n^2}{\ell^2} + \frac{m^2}{\ell^2} \right)$$

en dos puntos dentro del intervalo $(0, \frac{k-1}{2})$, a saber λ_{nm}^+ y λ_{nm}^- , siempre que

$$(d_1 + d_2) \left(\frac{n^2}{\ell^2} + \frac{m^2}{\ell^2} \right) < \mathcal{M}.$$

Sea

$$\ell_c = \sqrt{\frac{d_1 + d_2}{\mathcal{M}}} = \frac{\sqrt{k(d_1 + d_2)}}{\sqrt{k+1} - \sqrt{2}}.$$

Si $\ell \leq \ell_c$, entonces el único punto de bifurcación de Hopf es λ_H^* .

Bifurcación de Hopf

Si $\ell > \ell_c$, existen valores λ_{ij}^+ y λ_{ij}^- , con $(i, j) \in \mathbb{N}_0^2$ y $1 \leq i^2 + j^2 \leq n^2 + m^2$, Universidad del Cauca donde $n^2 + m^2$ es el mayor entero estrictamente menor que $(\ell/\ell_c)^2$, tales que para cada $(s, t), (i, j) \in \mathbb{N}_0^2$ con $1 \leq s^2 + t^2 < i^2 + j^2 \leq n^2 + m^2$ se cumple:

$$0 < \lambda_{st}^- < \lambda_{ij}^- < \hat{\lambda} < \lambda_{i,j}^+ < \lambda_{st}^+ < \lambda_H^*.$$

y

$$T_{ij}(\lambda_{ij}^\pm) = 0, \quad T_{st}(\lambda_{ij}^\pm) \neq 0.$$

Ahora vamos a verificar que con ciertas condiciones tendríamos que $D_{nm} > 0$ en $[0, \frac{k-1}{2}]$.

$$D_{nm}(\lambda) = \frac{\theta(k-\lambda)}{k(1+\lambda)} - d_2 A(\lambda) \left(\frac{n^2}{\ell^2} + \frac{m^2}{\ell^2} \right) + d_1 d_2 \left(\frac{n^2}{\ell^2} + \frac{m^2}{\ell^2} \right)^2.$$



Bifurcación de Hopf

En $[0, \frac{k-1}{2}]$ se tiene $\frac{k-\lambda}{1+\lambda} \geq 1$ y $A(\lambda) \leq \mathcal{M}$, por tanto

$$D_{nm}(\lambda) \geq \frac{\theta}{k} - d_2 \mathcal{M} \left(\frac{n^2}{\ell^2} + \frac{m^2}{\ell^2} \right) + d_1 d_2 \left(\frac{n^2}{\ell^2} + \frac{m^2}{\ell^2} \right)^2.$$

esta expresión se puede ver como una parábola con respecto $\left(\frac{n^2}{\ell^2} + \frac{m^2}{\ell^2} \right)$, y es positiva si su discriminante es negativo, esto es,

$$(d_2 \mathcal{M})^2 - 4d_1 d_2 \frac{\theta}{k} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d_1}{d_2} > \frac{(\sqrt{k+1} - \sqrt{2})^4}{4\theta k}.$$

De este análisis se obtiene el siguiente resultado.



Universidad
del Cauca

Bifurcación de Hopf

Teorema. Supongamos que $d_1, d_2, \theta > 0$ y $k > 1$,

$$\frac{d_1}{d_2} > \frac{(\sqrt{k+1} - \sqrt{2})^4}{4\theta k}, \quad \ell_c = \frac{\sqrt{k(d_1 + d_2)}}{\sqrt{k+1} - \sqrt{2}}.$$

Si $\ell > \ell_c$, existen valores λ_{ij}^+ y λ_{ij}^- en $(0, \frac{k-1}{2})$ con $(i, j) \in \mathbb{N}_0^2$ y $1 \leq i^2 + j^2 \leq n^2 + m^2$, donde $n^2 + m^2$ es el mayor entero estrictamente menor que $(\ell/\ell_c)^2$, tales que para cada $(s, t), (i, j) \in \mathbb{N}_0^2$ con $1 \leq s^2 + t^2 < i^2 + j^2 \leq n^2 + m^2$ se cumple:

$$0 < \lambda_{st}^- < \lambda_{ij}^- < \hat{\lambda} < \lambda_{ij}^+ < \lambda_{st}^+ < \lambda_H^*,$$

$$T_{ij}(\lambda_{ij}^\pm) = 0, \quad T_{st}(\lambda_{ij}^\pm) \neq 0 \quad \text{y} \quad D_{ij}(\lambda_{ij}^\pm) > 0, \quad D_{st}(\lambda_{ij}^\pm) \neq 0.$$

Con los resultados obtenidos y teniendo en cuenta la transversalidad:
 $\alpha'_{ij}(\lambda_{ij}^\pm) \neq 0$, se concluye que nuestro modelo admite bifurcación de Hopf.



bifurcación de Hopf

Es claro que el sistema (7) puede escribirse en la forma:

$$\frac{dU}{dt} = L(\lambda^*)U + F_{\lambda^*}(U) \quad (13)$$

donde

$$F_{\lambda^*}(U) = \begin{pmatrix} f(\lambda^*, N, P) - A(\lambda^*)N - B(\lambda^*)P \\ g(\lambda^*, N, P) - C(\lambda^*)N - D(\lambda^*)P \end{pmatrix} : U = \begin{pmatrix} N \\ P \end{pmatrix}.$$

De la ocurrencia de la Bifurcación de Hopf el sistema (13) se transforma en Forma normal:

$$\begin{cases} \frac{dz}{dt} = i\omega_0 z + \langle q^*, F_{\lambda^*}(U) \rangle \\ \frac{dr}{dt} = L(m^*)r + H(z, \bar{z}, r). \end{cases} \quad (14)$$

donde $H(z, \bar{z}, r) = F_{\lambda^*}(U) - \langle q^*, F_{\lambda^*}(U) \rangle q - \langle \bar{q}^*, F_{\lambda^*}(U) \rangle \bar{q}$ y
 $U = zq + \bar{z}\bar{q} + r$.

Coeficiente de Liapunov



Universidad
del Cauca

Del desarrollo de Taylor de la primera ecuación de (14) se calcula el coeficiente que acompaña el término cubico de $z^2 \bar{z}$, llamado coeficiente de Liapunov.

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(c_1(\lambda_H^*)) &= \operatorname{Re} \left\{ \frac{i}{2\omega_0} \langle q^*, \mathbf{B}_{qq} \rangle \cdot \langle q^*, \mathbf{B}_{q\bar{q}} \rangle + \frac{1}{2} \langle \bar{q}^*, \mathbf{C}_{qq\bar{q}} \rangle \right\} \\ &= -\frac{2}{k(k+1)} < 0 \end{aligned}$$



Universidad
del Cauca

Coeficiente de Liapunov

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(c_1(\lambda^*)) &= \operatorname{Re}\langle p, B_{r_{20}q} \rangle + \frac{1}{2} \operatorname{Re}\langle p, B_{r_{11}\bar{q}} \rangle + \frac{1}{2} \operatorname{Re}\langle p, C_{qq\bar{q}} \rangle \\ &= \frac{1}{8} (\xi_{1R} + 2\eta_{1R} + 2\tau_{1R} + 4\chi_{1R}) \left(f_{uu} + f_{uv} \frac{2d_2|\mathbf{n}|^2}{\ell^2\theta} + g_{uv} \right) \\ &\quad + \frac{1}{8} (\xi_{1I} + 2\eta_{1I} + 2\tau_{1I} + 4\chi_{1I}) \left(f_{uu} \frac{d_2|\mathbf{n}|^2}{\omega_0\ell^2} - f_{uv} \left(\frac{\omega_0}{\theta} - \frac{d_2^2|\mathbf{n}|^4}{\theta\omega_0\ell^4} \right) - g_{uu} \frac{\theta}{\omega_0} - g_{uv} \frac{d_2|\mathbf{n}|^2}{\ell^2\omega_0} \right) \\ &\quad + \frac{1}{8} f_{uv} (\xi_{2R} + 2\eta_{2R} + 2\tau_{2R} + 4\chi_{2R}) \\ &\quad + \frac{1}{8} (\xi_{2I} + 2\eta_{2I} + 2\tau_{2I} + 4\chi_{2I}) \left(f_{uv} \frac{d_2|\mathbf{n}|^2}{\omega_0\ell^2} - g_{uv} \frac{\theta}{\omega_0} \right) \\ &\quad + \frac{1}{16} \left(\tilde{\xi}_1 + 2\tilde{\eta}_1 + 2\tilde{\tau}_1 + 4\tilde{\chi}_1 \right) \left(f_{uu} + f_{uv} \frac{2d_2|\mathbf{n}|^2}{\ell^2\theta} - g_{uv} \right) \\ &\quad + \frac{1}{16} \left(\tilde{\xi}_2 + 2\tilde{\eta}_2 + 2\tilde{\tau}_2 + 4\tilde{\chi}_2 \right) f_{uv} + \frac{9}{64} \left(f_{uuu} + 2 \frac{d_2|\mathbf{n}|^2}{\ell^2\theta} f_{uvv} + g_{uuv} \right) \end{aligned}$$

donde los cálculos de las variables

$\xi_{1R}, \xi_{1I}, \xi_{2R}, \xi_{2I}, \eta_{1R}, \eta_{1I}, \eta_{2R}, \eta_{2I}, \tau_{1R}, \tau_{1I}, \tau_{2R}, \tau_{2I}, \eta_{1R}, \eta_{1I}, \eta_{2R}, \eta_{2I},$
 $\chi_{1R}, \chi_{1I}, \chi_{2R}, \chi_{2I}, \tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2, \tilde{\eta}_1, \tilde{\eta}_2, \tilde{\tau}_1, \tilde{\tau}_2, \tilde{\chi}_1, \tilde{\chi}_2,$

se encuentran en el extenso.



Universidad
del Cauca

Bifurcación de Hopf Supercrítica y subcrítica

La bifurcación de Hopf es supercrítica si

$$\frac{1}{\alpha'_{ij}(\lambda_{ij}^{\pm})} \operatorname{Re}(c_1(\lambda_{ij}^{\pm})) < 0.$$

La bifurcación de Hopf es subcrítica si

$$\frac{1}{\alpha'_{ij}(\lambda_{ij}^{\pm})} \operatorname{Re}(c_1(\lambda_{ij}^{\pm})) > 0.$$

Simulaciones



Universidad
del Cauca

Para el caso $n, m = 0$, los resultados coinciden con los correspondientes al sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) asociado al modelo (1). Esta versión del sistema involucra tres parámetros: k , a y θ . En primer lugar, elegimos los parámetros $k = 3$, $a = 1.2$, $\theta = 0.6$, los cuales producen $\lambda = \frac{\theta}{m-\theta} = 1$. En este caso, el valor de bifurcación de Hopf es $\lambda_H^* = \frac{k-1}{2} = 1$. La solución de equilibrio $E_2(\lambda, v_\lambda)$ es localmente asintóticamente estable.

Simulaciones

Dynamics of the predator-prey system (ODE)

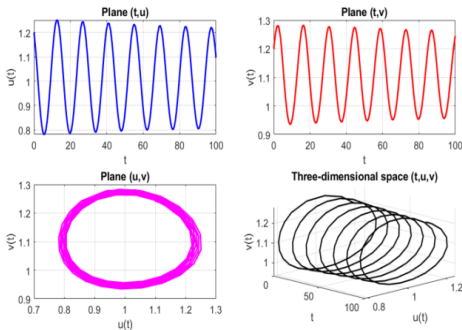


Figure: Simulación numérica de la versión EDO del sistema (1). Se consideran los parámetros $k = 3$, $a = 1.2$ y $\theta = 0.6$, con condición inicial $(N(0), P(0)) = (1.2, 1.2)$. La solución de equilibrio $E_2(1, 1.1)$ es asintóticamente estable.

Simulaciones



Universidad
del Cauca

Ahora, al considerar el caso $m = 0$, los resultados obtenidos para los sistemas (1) o (6) coinciden con los reportados en [1], tanto para $n \neq 0$ como para $n = 0$, en el dominio espacial dado por el segmento de recta $\Omega = (0, \ell\pi)$. De manera similar, para el caso $n = 0$, también se obtienen resultados análogos a los presentados en [1].

Por otra parte, nuestro modelo de EDP (1) o (6) involucra los parámetros $k, \theta, a, d_1, d_2, \ell$. Es posible elegir el parámetro de longitud ℓ de tal forma que ocurran varios puntos de bifurcación estacionaria asociados a valores críticos λ^* que satisfacen $\lambda^* \in (0, \frac{k-1}{2}]$. Si escogemos $\ell = 4.2$, tenemos $n = 1, \hat{m} = 0$ y junto con los valores de los parámetros $k = 3, a = 2.22, \theta = 0.6, d_1 = d_2 = 1$, obtenemos $\lambda^* = 0.36$.

Simulaciones



Universidad
el Cauca

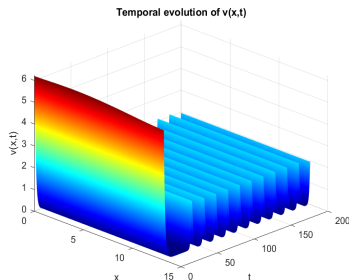
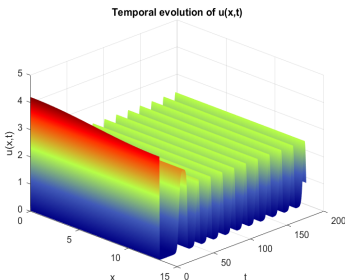


Figure: Simulación numérica del sistema (1) o (6): (izquierda) $u(x, t)$; (derecha) $v(x, t)$. Parámetros: $n = 1$, $m = 0$, $\ell = 4.2$, $k = 3$, $d_1 = d_2 = 1$, $a = 2.22$ y $\theta = 0.6$. Condición inicial:
 $(u_0(x), v_0(x)) = (4 + 0.2 \cos(\frac{\pi x}{\ell \pi}), 3 + 0.2 \sin(\frac{\pi x}{\ell \pi}))$. El punto de equilibrio espacialmente no homogéneo es $E_2 = (0.36, 0.54)$.

Simulaciones

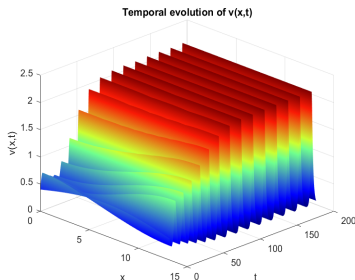
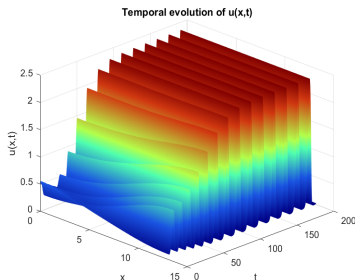


Figure: Simulación numérica del sistema (1) o (6): (izquierda) $u(x, t)$; (derecha) $v(x, t)$. Parámetros: $n = 1, m = 0, \ell = 4.2, k = 3, d_1 = d_2 = 1, a = 2.22$ y $\theta = 0.6$. Condición inicial: $(u_0(x), v_0(x)) = (0.4 + 0.2 \cos(\frac{\pi x}{\ell \pi}), 0.3 + 0.2 \sin(\frac{\pi x}{\ell \pi}))$. El equilibrio espacialmente no homogéneo $E_2(0.36, 0.54)$ es asintóticamente inestable.

Simulaciones



Universidad
el Cauca

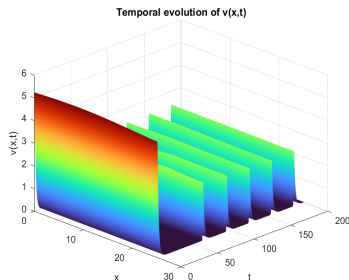
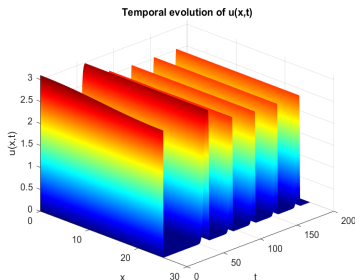


Figure: Simulación numérica del sistema (1) o (6): (izquierda) $u(x, t)$; (derecha) $v(x, t)$. Parámetros: $n = m = 1$, $\ell = 8$, $k = 3$, $d_1 = d_2 = 1$, $a = 5.63$ y $\theta = 0.6$. Condición inicial: $(u_0(x), v_0(x)) = (3 + 0.2 \cos(\frac{\pi x}{\ell \pi}), 3 + 0.2 \sin(\frac{\pi x}{\ell \pi}))$. El punto de equilibrio espacialmente no homogéneo es $E_2(0.11, 0.19)$.

Simulaciones

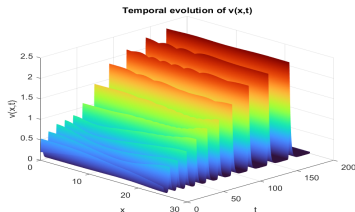
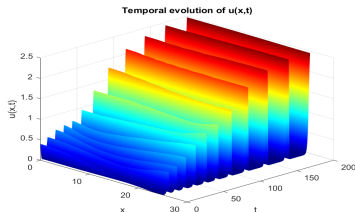


Figure: Simulación numérica del sistema (1) o (6): (izquierda) $u(x, t)$; (derecha) $v(x, t)$. Parámetros: $n = m = 1$, $\ell = 8$, $k = 3$, $d_1 = d_2 = 1$, $a = 5.63$ y $\theta = 0.6$. Condición inicial: $(u_0(x), v_0(x)) = (0.2 + 0.2 \cos(\frac{\pi x}{\ell \pi}), 0.2 + 0.2 \sin(\frac{\pi x}{\ell \pi}))$. El equilibrio espacialmente no homogéneo $E_2(0.11, 0.19)$ es asintóticamente inestable.



Universidad
del Cauca

Referencias

- [1] J. D. Ferreira, A. González and W. Molina, *Lyapunov coefficients for degenerate Hopf bifurcations and an application in a model of competing populations*. Journal of Mathematical Analysis and Applications & Vol. 455, pp 1-51, (2017).
- [2] J. Sotomayor, L.F. Mello, D. de Carvalho Braga, *Lyapunov Coefficients for Degenerate Hopf Bifurcations*. arXiv:0709.3949v1 [math.DS], Sep. 25 (2007), home page: <http://arxiv.org/abs/0709.3949>.
- [3] M. Farkas, E. Sáez, and I. Szántó, *Velcro bifurcation in competition models with generalized Holling functional response*. Miskolc Mathematical Notes Vol. 6 (2005), No. 2, pp. 185–195.
- [4] Y. A. Kuznetsov, *Elements of applied Bifurcation theory*. Springer-Verlag, (1998). .

¡Gracias por
su atención!



Universidad
del Cauca