

Curvas fraccionarias para la acumulación de especies: Modelación y simulación

Luz Antonia Pacheco Santiago

Dr. José del Carmen Jiménez Hernández

Dr. José Arturo Montoya Laos

Dr. Alfonso Caraveo

Universidad Tecnológica de la Mixteca

SOLABIMA 2026

Tabla de contenido

1. El modelo de Soberón y Llorente.
2. La modificación de Caraveo y su simulación.
3. Modelo con función de recolección exponencial y operador conformable
4. Algoritmo de simulación

El modelo de Soberón y Llorente.

Contexto biológico

Problema ecológico

- Predecir la riqueza de especies en un área con muestreo limitado.
- Modelar cómo aumenta el número de especies registradas (j) con el esfuerzo de muestreo (t).
- Curvas de acumulación: j vs $t \rightarrow$ Comportamiento asintótico.

Aporte de Soberón y Llorente (1993)

Tres modelos funcionales basados en procesos estocásticos para:

- Estimar diversidad biológica.
- Optimizar esfuerzo de muestreo.
- Predecir especies no observadas.

Relación con el proceso de nacimiento puro

Suposiciones del modelo relacion proceso de nacimiento puro

- Cada nueva especie descubierta es un "nacimiento".
- No hay "muertes" (extinciones locales).
- Probabilidad de descubrimiento depende del estado actual.

Estructura del sistema

$$P(j \rightarrow j + 1)\Delta t = \lambda(j, t)\Delta t,$$

$$P(j \rightarrow j)\Delta t = 1 - \lambda(j, t)\Delta t.$$

Donde $\lambda(j, t)$ es la función de recolección (tasa de descubrimiento).

Evolución temporal $p_t(j)$

La probabilidad $p_t(j)$, de que en el momento t la lista tenga exactamente j especies. Esta probabilidad obedece la siguiente ecuación,

$$\frac{dp_t(j)}{dt} = p_t(j-1)\lambda(j-1, t) - p_t(j)\lambda(j, t). \quad (1)$$

La ecuación diferencial para el primer y segundo momento de la distribución de j al tiempo t son,

$$\begin{aligned} \frac{d(E(j, t))}{dt} &= \sum_{j=0}^{\infty} p_t(j)\lambda(j, t), \\ \frac{d(E(j^2, t))}{dt} &= 2 \sum_{j=0}^{\infty} j p_t(j)\lambda(j, t) + \sum_{j=0}^{\infty} p_t(j)\lambda(j, t). \end{aligned}$$

La modificación de Caraveo y su simulación.

Derivada conformable

(Khalil et al., 2014) La derivada conformable de orden α se define como

$$D_t^\alpha x(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{x(t + \epsilon t^{1-\alpha}) - x(t)}{\epsilon},$$

para $\alpha \in (0, 1)$.

También puede escribirse como:

$$D_\alpha f(t) = t^{1-\alpha} \frac{df}{dt}.$$

Esta definición se extiende a órdenes superiores ($\alpha > 1$) de manera natural.

Ajuste del modelo

Considere el mismo modelo, el proceso de nacimiento puro, pero ahora aplicando el operador conformable de derivada D_t^α en la ecuación (1):

$$D_t^\alpha p_t(j) = p_t(j-1)\lambda(j-1, t) - p_t(j)\lambda(j, t).$$

Usando la definición en el lado izquierdo:

$$t^{1-\alpha} \frac{dp_t(j)}{dt} = p_t(j-1)\lambda(j-1, t) - p_t(j)\lambda(j, t), \quad (2)$$

o equivalentemente:

$$\frac{dp_t(j)}{dt} = t^{\alpha-1} [p_t(j-1)\lambda(j-1, t) - p_t(j)\lambda(j, t)].$$

Esperanza y varianza con operador fraccionario

Solución clásica ($\alpha = 1$):

$$S(t) = \frac{a}{b} [1 - e^{-bt}]$$

Solución generalizada ($0 < \alpha \leq 1$):

$$S(t) = \frac{a}{b} \left[1 - \exp \left(-\frac{bt^\alpha}{\alpha} \right) \right]$$

Interpretación:

- a : tasa inicial de descubrimiento.
- b : tasa de disminución del descubrimiento.
- α : modifica la escala temporal no linealmente

Solución clásica ($\alpha = 1$):

$$V(t) = S(t)e^{-bt}$$

Solución generalizada:

$$V(t) = S(t) \exp \left(-\frac{bt^\alpha}{\alpha} \right)$$

Propiedades:

- $V(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$
- La varianza también se generaliza con el mismo factor exponencial fraccionario.
- Para $\alpha < 1$, la convergencia es más lenta.

Distribución del número de especies

Distribución de probabilidad en tiempo t :

$$p_t(j) = \binom{N}{j} \left[\exp \left(-\frac{bt^\alpha}{\alpha} \right) \right]^{N-j} \left[1 - \exp \left(-\frac{bt^\alpha}{\alpha} \right) \right]^j$$

Características:

- **Caso clásico** ($\alpha = 1$): Se recupera la distribución binomial con $p = 1 - e^{-bt}$.
- **Caso general**: Distribución binomial con parámetro $p(t) = 1 - \exp(-bt^\alpha/\alpha)$.
- La probabilidad de encontrar nuevas especies decae como $\exp(-bt^\alpha/\alpha)$

Relación eventos–tiempos y ecuación de Kolmogorov

Sean $N(t)$ el número de eventos en $[0, t]$ y T_k el tiempo hasta el k -ésimo evento. Entonces

$$P[N(t) \leq k] = P[T_{k+1} > t].$$

Para $t \geq y$, la ecuación de Kolmogorov da

$$\frac{d}{dt}P_{kk}(t, y) = -\lambda_k(t)P_{kk}(t, y), \quad \lambda_k(t) = b(M - k)t^{\alpha-1}, \quad M = \frac{a}{b}.$$

Integrando desde y hasta t :

$$P_{kk}(t, y) = \exp \left[-\frac{b(M - k)}{\alpha} (t^\alpha - y^\alpha) \right] = P[T_{k+1} > t \mid T_k = y].$$

Esta relación es clave para simular los tiempos entre eventos.

Distribución condicional y simulación

La función de distribución condicional de T_{k+1} dado $T_k = y$ es

$$F(t | y) = P[T_{k+1} \leq t | T_k = y] = 1 - \exp \left[-\frac{b(M-k)}{\alpha} (t^\alpha - y^\alpha) \right], \quad t \geq y.$$

Propiedades:

$$F(y | y) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} F(t | y) = 1,$$

F es continua y estrictamente creciente para $t \geq y$.

Por inversión, con $U \sim U(0, 1)$:

$$T_{k+1} = \left(T_k^\alpha - \frac{\alpha}{b(M-k)} \ln(1 - U) \right)^{1/\alpha}$$

Algoritmo

Fijar $T_0 = 0$. Para $k = 0, 1, \dots, M - 1$:

1. Generar $U_k \sim \text{Unif}(0, 1)$.
2. Calcular

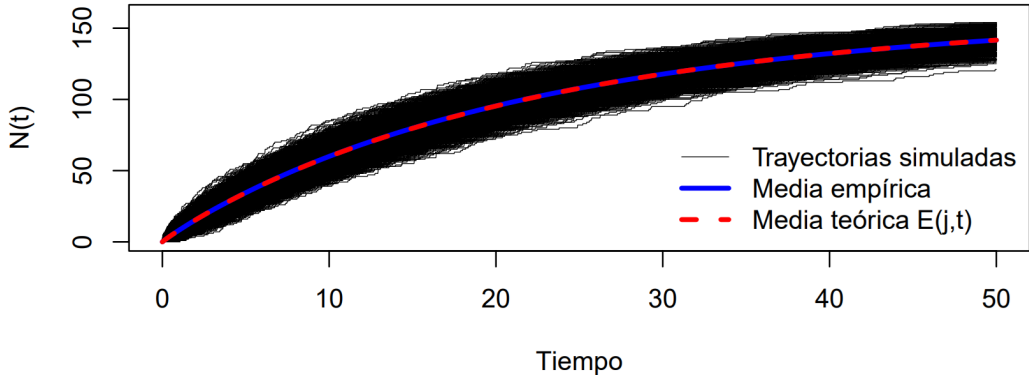
$$T_{k+1} = \left(T_k^\alpha - \frac{\alpha}{b(M-k)} \ln(1 - U_k) \right)^{1/\alpha}.$$

3. Guardar T_{k+1} .

Si $k = M$, ya no hay más saltos porque $\lambda_M(t) = 0$.

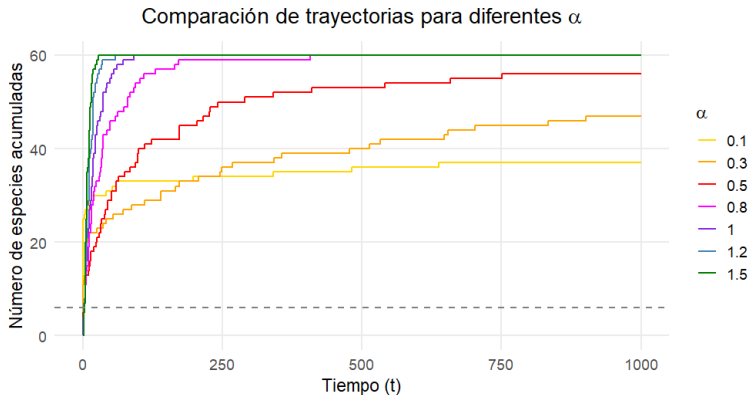
Cada T_{k+1} queda condicionado al valor anterior T_k .

Simulaciones $N(t)$



Parámetros: $\alpha = 0.95$, $a = 8$, $b = 0.05$, $M = 160$, $n = 10000$ trayectorias

Efecto del parámetro α



Observaciones

- $\alpha < 1$ (ej. 0.3, 0.5): Crecimiento inicial rápido.
- $\alpha = 1$: Caso clásico sin derivada conformable.
- $\alpha > 1$ (ej. 1.2, 1.5): Crecimiento más regular y predecible.

Interpretación: α controla la curvatura y la escala temporal del proceso.

Modelo con función de recolección exponencial y operador conformable

Planteamiento del modelo exponencial

Se considera la función de recolección con decaimiento exponencial:

$$\lambda(j) = ae^{-bj}, \quad a > 0, b > 0.$$

Justificación:

- Aumentar el tamaño de la colección disminuye la probabilidad de agregar una nueva especie de manera no lineal.
- Es razonable cuando la región muestreada es grande o los taxones son poco conocidos.
- La probabilidad de encontrar una nueva especie nunca llega a cero.

Ecuación para la esperanza

La ecuación diferencial para el primer momento de la distribución de j al tiempo t es:

$$\frac{dS}{dt} = \sum_{j=0}^{\infty} p_t(j) \lambda(j) = a \sum_{j=0}^{\infty} p_t(j) e^{-bj}.$$

Suponemos que el número de eventos sigue una distribución de Poisson, su función generadora de momentos es:

$$M_j(u) = e^{\theta(t)(e^u - 1)}.$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial:

$$\frac{d\theta}{dt} = a e^{\theta(e^{-b} - 1)}.$$

Integrando y usando la condición inicial $S(0) = \theta(0) = 0$, se obtiene:

$$S(t) = \frac{1}{1 - e^{-b}} \ln \left(1 + a(1 - e^{-b}) t \right)$$

Obtención de $S(t)$ en el modelo con operador conformable

La ecuación general para el primer momento es:

$$t^{1-\alpha} \frac{dE(j, t)}{dt} = \sum_{j=0}^{\infty} p_t(j) \lambda(j, t).$$

Sustituyendo la función de recolección exponencial $\lambda(j, t) = ae^{-bj}$:

$$t^{1-\alpha} \frac{dE(j, t)}{dt} = a \sum_{j=0}^{\infty} p_t(j) e^{-bj}.$$

Se identifica la suma como la función generadora de probabilidad evaluada en e^{-b} :

$$\sum_{j=0}^{\infty} p_t(j) e^{-bj} = G(e^{-b}, t).$$

Solución de la EDO

Suponemos que el número de eventos sigue una distribución de Poisson, su función generadora de probabilidad es:

$$G(s, t) = e^{\theta(t)(s-1)}.$$

Evaluable en $s = e^{-b}$ tenemos que: $G(e^{-b}, t) = e^{\theta(t)(e^{-b}-1)}$ Sustituyendo en la ecuación diferencial:

$$t^{1-\alpha} \frac{d\theta}{dt} = a e^{\theta(e^{-b}-1)}.$$

Definimos $d = 1 - e^{-b} > 0$. Separando variables:

$$e^{-\theta d} d\theta = a t^{\alpha-1} dt.$$

Integrando y usando la condición inicial $\theta(0) = 0$, se obtiene:

$$E(j, t) = \theta(t) = \frac{1}{1 - e^{-b}} \ln \left(1 + \frac{a(1 - e^{-b})}{\alpha} t^\alpha \right)$$

Algoritmo de simulación

Relación eventos–tiempos y ecuación de Kolmogorov

Sean $N(t)$ el número de eventos en $[0, t]$ y T_k el tiempo hasta el k -ésimo evento. Entonces

$$P[N(t) \leq k] = P[T_{k+1} > t].$$

Para $t \geq y$, la ecuación de Kolmogorov da

$$\frac{d}{dt}P_{kk}(t, y) = -\lambda_k(t)P_{kk}(t, y), \quad \lambda_k(t) = a e^{-bk} t^{\alpha-1}.$$

Integrando desde y hasta t :

$$P_{kk}(t, y) = \exp \left[-\frac{a e^{-bk}}{\alpha} (t^\alpha - y^\alpha) \right] = P[T_{k+1} > t \mid T_k = y].$$

Si se conserva un máximo de M eventos, se toma $k = 0, \dots, M-1$ y $\lambda_M = 0$.

Distribución condicional, simulación y algoritmo

La función de distribución condicional de T_{k+1} dado $T_k = y$ es

$$F(t | y) = P[T_{k+1} \leq t | T_k = y] = 1 - \exp \left[-\frac{a e^{-bk}}{\alpha} (t^\alpha - y^\alpha) \right], \quad t \geq y.$$

Propiedades:

$$F(y | y) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} F(t | y) = 1,$$

F es continua y estrictamente creciente para $t \geq y$.

Por inversión, con $U \sim U(0, 1)$:

$$T_{k+1} = \left(T_k^\alpha - \frac{\alpha}{a e^{-bk}} \ln(1 - U) \right)^{1/\alpha}$$

Algoritmo de simulación

Fijar $T_0 = 0$. Para $k = 0, 1, \dots$ (o $k = 0, \dots, M - 1$ si hay máximo M):

1. Generar $U_k \sim \text{Unif}(0, 1)$.

2. Calcular

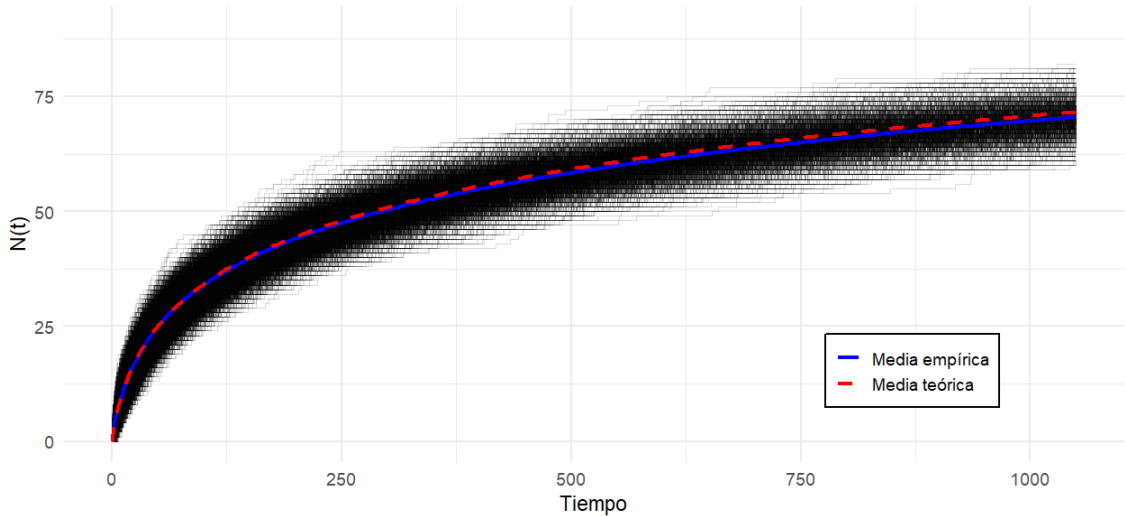
$$T_{k+1} = \left(T_k^\alpha - \frac{\alpha}{a e^{-bk}} \ln(1 - U_k) \right)^{1/\alpha}.$$

3. Guardar T_{k+1} .

Cada T_{k+1} queda condicionado al valor anterior T_k .

Simulación de $N(t)$ con $\lambda = a \cdot e^{-bj} \cdot t^{\alpha-1}$

Parámetros: $\alpha = 0.85$, $a = 1.5$, $b = 0.05$, $t_{\max} = 1050$, $n = 10000$ trayectorias



Conclusiones

- Se desarrolló un método de simulación exacta para tiempos entre eventos basado en la probabilidad condicional y el método de la transformada inversa.
- El parámetro α es crucial para modelar la memoria del proceso:
 - $\alpha < 1$: **Sobre-dispersión** (eventos agrupados).
 - $\alpha > 1$: **Sub-dispersión** (eventos regulares).
- Esto permite una simulación exacta y computacionalmente eficiente mediante tiempos exponenciales.
- La esperanza teórica $\theta(t)$ sirve como validación de las trayectorias simuladas.

Referencias



Caraveo Balderas, L. A. (2026).

On the use and criticism of fractional models.

Tesis de doctorado, UNISON.

Directores de tesis: Dr. José Arturo Montoya Laos y Dra. Lilia Leticia Ramírez Ramírez.



Khalil, R., Al Horani, M., Yousef, A. y Sababheh, M. (2014).

A new definition of fractional derivative.

Journal of computational and applied mathematics, 264, 65–70.



Soberón, J. y Llorente, J. (1993).

The use of species accumulation functions for the prediction of species richness.

Conservation biology, 7, 3, 480–488.



Taylor, H. M. y Karlin, S. (1998).

An Introduction to Stochastic Modeling.

Academic Press, San Diego, tercera edición.

Gracias.

Preguntas y comentarios